

修士論文

炉物理実験手法に対する
Dynamic Mode Decomposition の応用

名古屋大学大学院

工学研究科博士前期課程

総合エネルギー工学専攻

山本章夫研究室

西岡楓賀

令和4年2月

炉物理実験手法に対する Dynamic Mode Decomposition の応用

原子核エネルギー制御工学グループ 山本研究室 西岡楓賀

1. 緒言：長寿命放射性核種の核変換を目的とした加速器駆動システムの開発や、1F 燃料デブリの安全な取り出しに向けて、万が一の反応度事故に備えるため体系の未臨界度を監視可能な技術が求められている。未臨界度を測定するためには、体系内の中性子集団の振る舞いに対して最も支配的な基本モード成分を抽出する必要がある。しかし、これまで提案されてきた未臨界度測定手法では基本モード成分のみを抽出することが難しく、いずれの手法も未臨界度測定結果に高次モード成分による系統誤差が生じるといった課題があった。そこで本研究では、従来の様々な未臨界度測定手法に Dynamic Mode Decomposition (DMD) と呼ばれる解析手法を応用することで、従来法の課題を解決することが可能か検討を実施した[1],[2],[3]。得られた研究成果のうち、本発表では、面積比法と呼ばれる未臨界度測定手法に対して DMD を適用した結果について報告する。

2. 提案手法：面積比法とは、パルス中性子(PNS)法測定結果における①即発中性子減衰成分の総計数(即発中性子成分面積 A_p)と②遅発中性子による定常成分の総計数(遅発中性子成分面積 A_d)の比 A_p/A_d を求めることで、ドル単位の未臨界度を推定する手法である。ここで、 m 個の検出器を用いて、PNS 法の中性子計数率を時間幅 Δt 毎に n ステップ測定したとする。PNS 法測定結果を m 行 n 列の行列 \mathbf{X} に整理し、定常成分を抽出するため全時間ステップに亘って 1 となる定常信号も \mathbf{X} に追加する。 \mathbf{X} から 1 列目 $\sim(n-1)$ 列目までのデータ列を取り出した行列を $\mathbf{X}_{1:n-1}$ 、2 列目 $\sim n$ 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{2:n}$ と定義する。DMD では、 $\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{X}_{2:n}$ となる時間発展行列 \mathbf{A} を、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の擬似逆行列を用いて推定する。 \mathbf{A} を固有値分解することで、各モードの固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ を得る。固有値 λ_i は $\omega_i = \ln(\lambda_i)/\Delta t$ より各モードの時定数 ω_i に変換できる。DMD では測定データを $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \vec{\phi}_i e^{\omega_i t}$ と展開できる(C_i : i 次モード展開係数)。高次モード成分を除去するため、定常成分に対応する 1 番目モード $C_1 \vec{\phi}_1 e^{\omega_1 t}$ ($\omega_1 \approx 0$)と、基本モード成分に対応する 2 番目モード $C_2 \vec{\phi}_2 e^{\omega_2 t}$ のみを抽出し、 $x(t) = C_2 \vec{\phi}_2 e^{\omega_2 t} + C_1 \vec{\phi}_1$ とする。 $x(t)$ の第 1 項 $C_2 \vec{\phi}_2 e^{\omega_2 t}$ と第 2 項 $C_1 \vec{\phi}_1$ をそれぞれ $0 \leq t \leq \tau$ (τ : PNS 打ち込み周期)で時間積分することで A_p と A_d を計算し、面積比 A_p/A_d を求めることでドル単位の未臨界度を推定する。なお、ランダムサンプリング法を活用して面積比の統計誤差も評価した。

3. 適用結果：全ての制御棒・安全棒を全挿入した状態の KUCA-A 架台で PNS 法による未臨界度測定実験を行った。合計 10 個の検出器を用いて、30 Hz の PNS 打ち込み周期で中性子計数率を 1,000 秒間測定した。マスクング時間(PNS 打ち込み直後の測定結果を除外する時間)を変化させて、従来法と DMD により面積比を推定した。従来法による面積比(図 1)は、マスクング時間に対して値が変化し、検出器毎に推定結果が大きく異なった。一方、DMD による面積比(図 2)は、制御棒値・余剰反応度測定結果から算出した未臨界度とマスクング時間に依らず統計誤差の範囲内で概ね一致した。さらに、DMD では面積比の統計誤差が最小となる結果を選ぶことで、複数の検出器結果から面積比推定結果を一意に得ることができた。以上の検討により、DMD を適用した面積比法の有効性を確認できた。

公刊論文および口頭発表

- [1] F. Nishioka, T. Endo, A. Yamamoto *et al.*, *Proc. M&C2021*, Oct. 3–7 (2021).
- [2] F. Nishioka, T. Endo, A. Yamamoto *et al.*, *Nucl. Sci. Eng.*, **196**(2), pp. 133–143 (2021).
- [3] 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫 他, 日本原子力学会秋の大会, 9月 8 日–10 日 (2021).

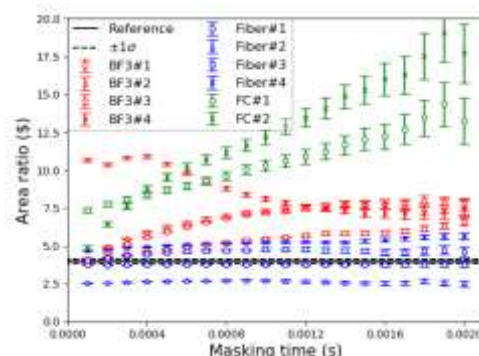


図 1：従来法による面積比推定結果

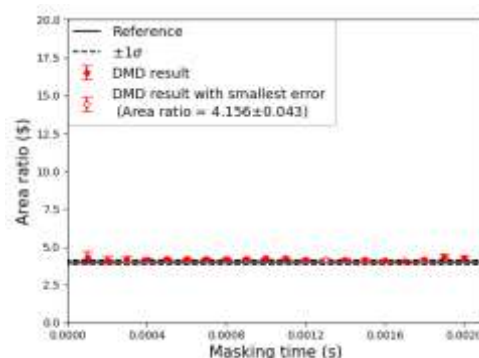


図 2：DMD による面積比推定結果

目次

第1章	序論	1
1.1	背景	1
1.1.1	加速器駆動システムの未臨界監視	1
1.1.2	東京電力福島第一原子力発電所の燃料デブリ取り出し	5
1.2	本研究の目的	8
1.3	本論文の構成	8
	参考文献	10
第2章	Dynamic Mode Decomposition	12
2.1	本章の概要	12
2.2	DMD の概要	12
2.3	DMD の理論	13
2.4	DMD の計算手順	16
2.4.1	Standard DMD	17
2.4.2	Projected DMD, Exact DMD	19
2.4.3	Total least squares DMD	22
2.5	ランダムサンプリング法を用いた統計誤差評価手法	24
2.6	本章のまとめ	26
	参考文献	28
第3章	Simmons-King 法に対する DMD の適用	30
3.1	本章の概要	30
3.2	パルス中性子法の理論	31
3.2.1	グリーン関数	31
3.2.2	パルス中性子法の理論式	33
3.3	即発中性子減衰定数 α の推定手法	35
3.3.1	従来フィッティング法による α の推定	35
3.3.2	DMD による α の推定	36
3.4	京都大学臨界集合体実験装置を利用したパルス中性子法実験	37
3.4.1	KUCA の概要	38
3.4.2	実験体系	38
3.4.3	制御棒価値と余剰反応度の測定	46
3.4.4	パルス中性子法の測定と解析	53
3.5	本章のまとめ	61
	参考文献	62

第4章	面積比法に対する DMD の適用	64
4.1	本章の概要	64
4.2	面積比法の理論	64
4.2.1	即発中性子成分面積	66
4.2.2	遅発中性子成分面積	69
4.2.3	面積比法の理論式	72
4.3	面積比の推定手法	73
4.3.1	外挿面積比法による面積比推定手法	73
4.3.2	DMD による面積比推定手法	75
4.4	KUCA パルス中性子法実験結果に対する面積比法の適用	77
4.4.1	実験体系	78
4.4.2	面積比法の測定と解析	80
4.5	本章のまとめ	87
	参考文献	90
第5章	Rossi- α 法に対する DMD の適用	91
5.1	本章の概要	91
5.2	Rossi- α 法の理論	92
5.2.1	1 時点検出確率	92
5.2.2	2 時点検出確率	94
5.2.3	Rossi- α 法の理論式	99
5.3	即発中性子減衰定数 α の推定手法	100
5.3.1	従来フィッティング法による α の推定	100
5.3.2	DMD による α の推定	102
5.4	KUCA を利用した原子炉雑音測定実験	103
5.4.1	実験体系	103
5.4.2	制御棒価値と余剰反応度の測定	109
5.4.3	臨界体系における原子炉雑音測定実験	115
5.4.4	全制御棒・安全棒挿入体系における原子炉雑音測定実験	120
5.4.5	運転停止体系における原子炉雑音測定実験	124
5.5	本章のまとめ	129
	参考文献	132
第6章	結論	134
6.1	まとめ	134
6.2	今後の課題	139
APPENDIX. A	JAWAS-T を利用したパルス中性子法実験	141
A.1	JAWAS-T の概要	141

A.2	実験器具	143
A.3	実験体系・実験結果.....	146
A.3.1	Run1 と Run2 の測定.....	146
A.3.2	Run3 と Run4 の測定.....	149
A.3.3	Run5 と Run6 の測定.....	151
A.4	DMD と従来フィッティング法による解析	153
	参考文献.....	160
APPENDIX. B	ペリオド法に対する DMD の適用	161
B.1	理想的なペリオド法測定結果に対する DMD の適用	162
B.1.1	理想的なペリオド法測定結果に対する DMD 適用結果.....	162
B.1.2	不感時間の影響を考慮した解析	165
B.1.3	統計誤差の影響を考慮した解析	167
B.2	実際のペリオド法測定結果に対する DMD の適用.....	173
	参考文献.....	178
	公刊論文および口頭発表.....	179

第1章 序論

1.1 背景

1.1.1 加速器駆動システムの未臨界監視

現在の軽水炉に代わる次世代のハイブリッドシステムとして、加速器と原子炉を組み合わせた加速器駆動システム(Accelerator Driven System : ADS)の研究が進められている。ADSでは、加速器から放出された約 1 GeV の高エネルギー陽子ビームを Pb-Bi 中性子源などのターゲットに照射する[1]。高エネルギー陽子ビームの照射により、ターゲットの原子核が複数の破片に破碎することで、原子核から陽子、中性子、中間子などの粒子が放出される反応である核破碎反応[2]が発生する。ADS では、この核破碎反応によって生じた中性子により未臨界体系での核分裂反応を維持する。ADS の概念図を Fig. 1-1 に示す。ADS では、加速器を停止すれば炉心の核分裂連鎖反応が収束するため、安全性が高いという利点がある。また、非常に長い半減期を持つマイナーアクチノイドの核変換処理にも優れ、高レベル放射性廃棄物の処理・処分に資すると考えられ、様々な研究がなされてきた[3],[4]。

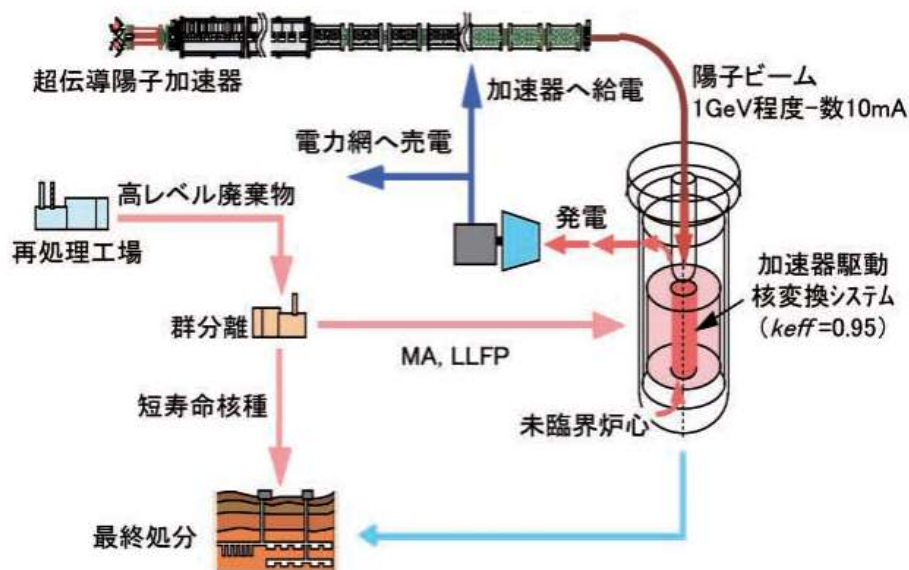


Fig. 1-1 加速器駆動システム(ADS)の概念図[5]

ADS は未臨界体系であるため、反応度事故に対する反応度余裕が大きいという利点もある。反応度事故とは、原子炉に誤って大きな反応度が添加されることで出力が異常に増大する事故であり、例としてチェルノブイリ原子力発電所事故が挙げられる[6]。ここで、反応度について説明する。反応度とは、体系が臨界状態からどのくらい離れているかを表す量であり、以下式で定義される。

$$\rho \equiv \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \quad (1-1)$$

(1-1)式における k_{eff} は実効増倍率と呼ばれるパラメータである。核分裂反応により生成された中性子が、次の核分裂反応を起こして新たに中性子を発生させるまでを「世代」と呼び、実効増倍率 k_{eff} はある世代の中性子数と次の世代の中性子数の比で表せる。

$$k_{\text{eff}} = \frac{\text{次の世代の中性子数}}{\text{ある世代の中性子数}} \quad (1-2)$$

(1-1)式において、 $\rho = 0$ すなわち $k_{\text{eff}} = 1$ の場合、体系は臨界状態であり核分裂連鎖反応が一定の水準で持続する。また、 $\rho < 0$ すなわち $k_{\text{eff}} < 1$ の場合、体系は未臨界状態であり核分裂連鎖反応が時間と共に収束する。そして、 $\rho > 0$ すなわち $k_{\text{eff}} > 1$ の場合、体系は超臨界状態となり、核分裂連鎖反応が持続するのみならず、体系内の中性子数が時間と共に増大していく。超臨界状態は出力が時間と共に増大する危険な状態であるため、現在の軽水炉では原子炉起動時などを除けば、基本的には制御棒等の反応度制御系により臨界状態を保った状態で運転がなされている。

一方、ADS 炉心は未臨界体系であることから、通常原子炉のような反応度制御系を持たない設計となる。従って、万が一にも炉心が臨界状態に近づいた場合を想定し、常に炉心の未臨界度を監視することで、反応度事故を未然に防ぐことができる技術の開発が求められている[5]。未臨界度とは、体系がどのくらい臨界未満の状態かを表す値であり、(1-3)式のように反応度 ρ を異符号にした値として定義される。

$$(-\rho) \equiv \frac{1 - k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}} \quad (1-3)$$

また、反応度 ρ を実効遅発中性子割合 β_{eff} で除した値 ρ/β_{eff} をドル単位(\$)の反応度と呼ぶ。実効遅発中性子割合とは、核分裂反応で発生する中性子における遅発中性子の割合を表す。遅発中性子は、核分裂反応で発生する遅発中性子先行核が崩壊することで体系内に遅れて投入される中性子を指す。一方、核分裂反応直後に発生する中性子を即発中性子と呼ぶ。ドル単位の反応度は、体系が即発中性子のみで臨界に達する即発臨界状態かを判断する指標となり、ドル単位の反応度が1\$ ($\rho = \beta_{\text{eff}}$)を超えると体系は即発臨界となる。即発臨界状態では、通常考えられる機械装置では制御できない急激な出力上昇が生じるため、通常軽水炉では遅発中性子も含めて臨界状態になるように制御されている。

ADS の未臨界度を測定する手法としてパルス中性子法が挙げられる[7],[8]。パルス中性子法とは、加速器などを用いて未臨界体系に中性子をパルス状に打ち込み続け、パルス中性子打ち込み後の中性子計数率の時間変化を測定する手法である。パルス中性子法における中性子計数率の時間変化の例を Fig. 1-2 に示す。Fig. 1-2 の横軸はパルス中性子打ち込み後の経過時間、縦軸は測定された中性子計数率である。Fig. 1-2 のようなパルス中性子測定結果では、パルス中性子打ち込み直後に中性子計数率が立ち上がった後、未臨界体系であるので即発中性子が指数関数的に減衰し、最終的に遅発中性子による定常部分が現れる。パルス中

中性子法では、パルス中性子が打ち込まれ続けているので、核燃料内に遅発中性子先行核が蓄積していく。この蓄積した遅発中性子先行核が崩壊することで、Fig. 1-2 のように遅発中性子に起因する定常成分が現れることとなる。

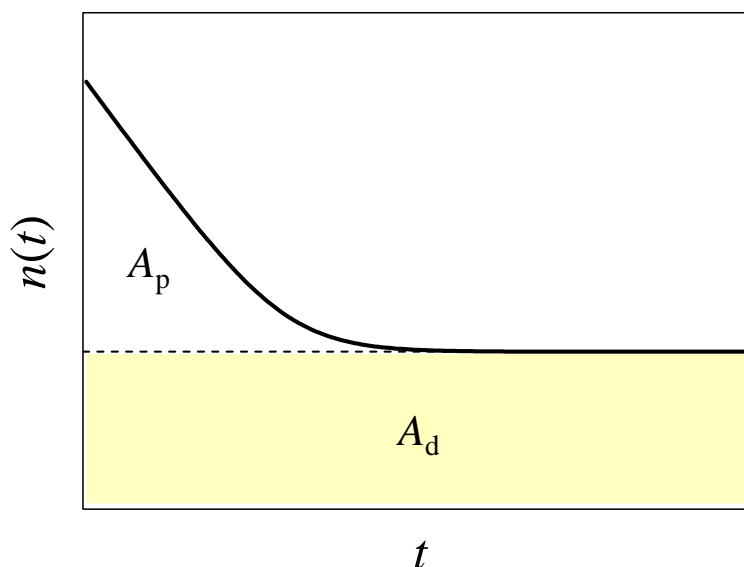


Fig. 1-2 パルス中性子法における中性子計数率の時間変化[9]

Fig. 1-2 のようなパルス中性子法測定結果から未臨界度を測定する手法として Simmons-King 法[10]がある。Simmons-King 法では、パルス中性子法測定結果から基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を測定することによって未臨界度を推定する。即発中性子減衰定数 α とは未臨界体系の即発中性子数が $1/e$ 倍に減少するまでの時定数であり、Fig. 1-2 において即発中性子が指数関数的に減衰する速さに対応する。ここで、基本モード成分について説明する。第 3 章 3.2 節で説明するが、パルス中性子法における中性子計数率の理論式を導くと、中性子計数率は複数のモードの足し合わせで表現できる。複数のモードの中で最も減衰が遅く、体系内の中性子の振る舞いを最も支配する成分が基本モード成分である。また、本論文では基本モード成分より減衰が速いモードを纏めて高次モード成分と呼称する。

ここからは、即発中性子減衰定数 α から未臨界度を推定する方法を説明する。パルス中性子法における即発中性子の減衰を考えると、パルス中性子打ち込み直後は遅発中性子先行核の崩壊による遅発中性子の発生を無視できる。従って、この領域では相対的に遅発中性子の寄与が少なく、ほとんど即発中性子のみが体系内に存在すると考えることができる。即発中性子のみが体系内に存在すると考えた場合、体系内における中性子数の時間変化を表す一点炉動特性方程式は以下のように表せる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\text{eff}}}{\Lambda} n(t) \quad (1-4)$$

ここで、 $n(t)$ は中性子数(-)、 ρ は反応度(-)、 β_{eff} は実効遅発中性子割合(-)である。また、 Λ は

中性子生成時間と呼ばれ、核分裂反応で発生した中性子が次の世代の中性子を生み出すまでの時間(s)を表す。(1-4)式を解くと次のようになる。

$$n(t) = n_0 e^{-\frac{\beta_{\text{eff}} - \rho}{\Lambda} t} \quad (1-5)$$

(1-5)式では $n_0 = n(0)$ とした。(1-5)式の指数部 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ が即発中性子減衰定数に対応する。即発中性子減衰定数を α と置くと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta_{\text{eff}} - \rho}{\Lambda} \\ &= \frac{\beta_{\text{eff}}}{\Lambda} \left(\frac{-\rho}{\beta_{\text{eff}}} + 1 \right) \end{aligned} \quad (1-6)$$

(1-6)式より、 α とドル単位の未臨界度 $(-\rho/\beta_{\text{eff}})$ の関係は以下のように表せる。

$$\frac{-\rho}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{\alpha \Lambda}{\beta_{\text{eff}}} - 1 \quad (1-7)$$

ここで、仮に体系が臨界状態の場合、 $\rho = 0$ であるため(1-7)式は以下のように変形できる。

$$0 = \frac{\alpha_C \Lambda_C}{\beta_{\text{eff},C}} - 1 \quad (1-8)$$

(1-8)式において、下添字 C は臨界時の値を示している。臨界に近い範囲では $\Lambda \approx \Lambda_C$ が成立し、 β_{eff} は未臨界度の変化に対して大きく変化せず $\beta_{\text{eff}} \approx \beta_{\text{eff},C}$ と見なせる。従って、(1-7)式と(1-8)式より以下の関係が導ける。

$$\frac{-\rho}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{\alpha - \alpha_C}{\alpha_C} \quad (1-9)$$

このように **Simmons-King** 法では、臨界時の即発中性子減衰定数 α_C を反応度測定の基準点とし、臨界に近い未臨界状態での即発中性子減衰定数 α を測定することにより、ドル単位の未臨界度を推定することができる。

ただし、**Simmons-King** 法による未臨界度測定は、一点炉動特性方程式に基づいて導出していることから、基本モード成分に対応する α を測定できることが前提となっている。 α の推定値は、Fig. 1-2 のような実験結果に対して、フィッティング式 $C(t) = C_0 e^{-\alpha t} + C_{\text{BG}}$ で最小二乗フィッティングすることにより得られる。しかし、その非線形最小二乗フィッティングにおいて、基本モード成分の α のみを抽出する方法論については未だ検討の余地があり、上述のような従来のフィッティング手法では、高次モード成分の影響で検出器を配置した位置によって α 推定結果が異なるという課題がある[11]。先行研究として、線形結合法による高次モード成分の影響を低減した α の推定方法[12],[13],[14]などが挙げられる。線形結合法では、複数の検出器で得られたパルス中性子法測定結果を、単一の指数関数で表現されるように重みづけ係数を用いて線形結合する。線形結合を行う際は、 α だけではなく重みづけ係数の値も非線形最小二乗法フィッティングによって決定する。従って、基本モード成分の α を推定するためには、これらのフィッティングパラメータの初期値を適切に設定する必要

がある。しかし、現状の線形結合法では、フィッティングパラメータの初期値を自動的に決定できるアルゴリズムが未開発であるという課題がある。従って、基本モード成分の α を推定可能な手法の開発は、現在においても未解決の課題として残っている。

Simmons-King 法の他に、パルス中性子法の測定結果から未臨界度を推定する手法として面積比法[15]が挙げられる。面積比法における「面積」とは、パルス中性子法の中性子計数測定結果を時間積分した値を指す。面積比法では、Fig. 1-2 に示した①体系内における即発中性子の総数に比例した量である即発中性子成分面積 A_p と、②体系内の遅発中性子の総数に比例した量である遅発中性子成分面積 A_d について、面積比 A_p/A_d を計算することでドル単位の未臨界度($-\rho/\beta_{\text{eff}}$)を推定する。第 4 章 4.2 節で具体的に説明するが、面積比 A_p/A_d がドル単位の未臨界度($-\rho/\beta_{\text{eff}}$)と等しくなるには、パルス中性子法における中性子計数率の基本モード成分が抽出可能であることを仮定している。従って、面積比法によるドル単位未臨界度の推定についても、Simmons-King 法における α の推定と同様に、パルス中性子法測定結果における基本モード成分のみを抽出できるような手法が必要となる。高次モード成分の影響を軽減した上で、基本モード成分の面積比を推定する手法として外挿面積比法が提案されている[16],[17]。外挿面積比法とは、パルス中性子法測定結果において高次モード成分が残存している時間領域を削除した上で、測定結果に対して $C(t) = C_0 e^{-\alpha t} + C_{\text{BG}}$ でフィッティングを行い、高次モード成分が残存する時間領域を基本モード成分で外挿する手法である。パルス中性子法測定結果において削除する時間領域をマスクング時間と呼ぶ。外挿面積比法では、フィッティングにより推定された α 、 C_0 、 C_{BG} から面積比を推定する。外挿面積比法では、マスクング時間を設定することにより高次モード成分の影響を軽減することを試みているが、高次モード成分の影響を完全に除去することはできないため、設定するマスクング時間の値や検出器位置によって面積比推定結果が変化するという課題がある。従って、マスクング時間や検出器位置に依らず頑健に面積比を推定可能な手法の開発が望まれている。

1.1.2 東京電力福島第一原子力発電所の燃料デブリ取り出し

2011 年 3 月 11 日に発生した東北地方太平洋沖地震に起因する大津波により、東京電力福島第一原子力発電所(1F)は冷却機能を喪失した。それにより、原子炉圧力容器内の核燃料が高温となり溶融し、更に溶融した核燃料が原子炉圧力容器下部へ落下するメルトダウンが発生した。また、1F では溶け落ちた核燃料が多量であったため、溶け落ちた核燃料のほとんどが原子炉圧力容器を貫通して原子炉格納容器にまで到達した[18]。

溶け落ちた核燃料が周囲の構造物と共に冷え固まった燃料デブリ(Fig. 1-3)は、2022 年 2 月現在においても未だ取り出されていない。これまでの計画では、2021 年内に燃料デブリ取り出し作業が開始される予定であったが[20]、新型コロナウイルスの影響により燃料デブリ取り出し開始は 1 年程度遅延する見込みとなっている[21]。1F の廃炉作業終了までには

30~40年の年月を要するとされており[21]、その廃炉作業の中でも燃料デブリの取り出しは最重要課題の一つとなっている。

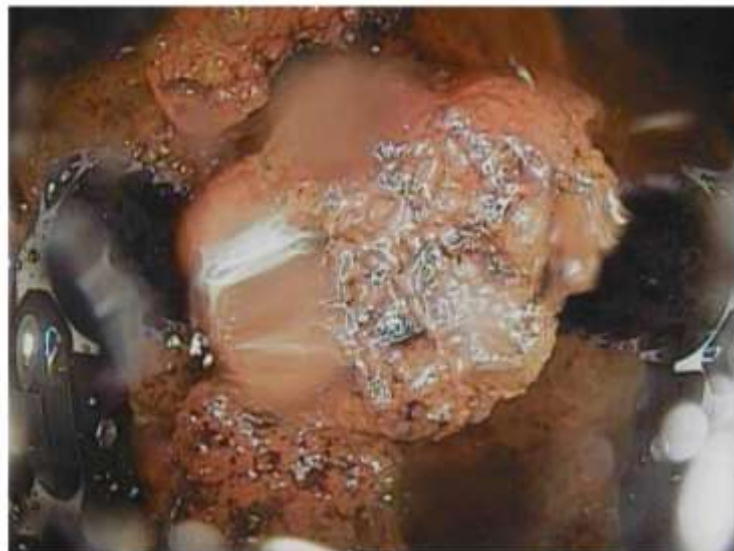


Fig. 1-3 1F2号機における格納容器堆積物[19]

現在の燃料デブリの状況は、実効増倍率が0.95未満の深い未臨界状態であると推定されている[22],[23]が、今後の燃料デブリ取り出し作業により燃料デブリの形状や周囲の水量が変化することで、燃料デブリが臨界状態に達する可能性が僅かに存在する。作業員や周辺環境に対する放射線防護の観点から、燃料デブリ取り出しに関わるいかなる工程においても、燃料デブリが臨界に達するのを防止しなければならない。そのためには、1.1.1項で説明したADSと同様に、万が一にも燃料デブリが臨界状態に近づいた場合を想定し、常に燃料デブリの未臨界度を監視する必要がある。

1F燃料デブリの未臨界度監視技術の一つとして、原子炉雑音測定を利用した即発中性子減衰定数 α の測定が現在検討されている[24]。原子炉雑音とは、体系内における不規則な核分裂反応や中性子吸収反応により、定常状態であっても体系内の中性子数がある値の周りを僅かにゆらぐ現象である。原子炉雑音の測定結果から即発中性子減衰定数 α を測定する手法の一つとしてRossi- α 法[25]が挙げられる。Rossi- α 法では、原子炉雑音測定結果からFig. 1-4のように中性子が検出された2時点の検出時間間隔 τ を計算し、検出された全ての中性子の組み合わせについて検出時間間隔 τ を求めてFig. 1-5のような頻度分布 $P(\tau)$ を作成する。Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ は、一つの中性子が検出された時、その中性子と同じ核分裂連鎖系に属する中性子がその後検出される確率の時間変化を表す。本論文では、同じ核分裂連鎖系に属する中性子の組み合わせを「相関を持つ中性子ペア」、別の核分裂連鎖系に属する中性子の組み合わせを「非相関の中性子ペア」と呼称する。Fig. 1-5では、 $P(\tau)$ が始めに指数関数的に減衰し、最終的に一定の値をとっている。 $P(\tau)$ の始めの減衰は、相関を持つ中性子

ペアが検出される確率が指数関数的に減衰することを示し、この減衰における減衰定数が即発中性子減衰定数 α に対応する。 $P(\tau)$ が一定となっている領域は、非相関の中性子ペアが検出される確率に対応する。

第5章5.2節で説明するが、Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の理論式も、パルス中性子法における中性子計数率の理論式と同様に、複数の高次モード成分の足し合わせで表現できる。1.1.1項で説明したように、即発中性子減衰定数 α から未臨界度を推定するためには、基本モード成分の α を抽出する必要がある。現状の手法で α を推定するには、頻度分布 $P(\tau)$ に対してフィッティング式 $P(\tau) = P_0 \exp(-\alpha\tau) + P_u$ で非線形最小二乗フィッティングを行わざるを得ない。従って、Rossi- α 法でも、Simmons-King法と同様に、高次モード成分の影響を除去した形で基本モード成分の α を推定可能な手法の開発が求められている。

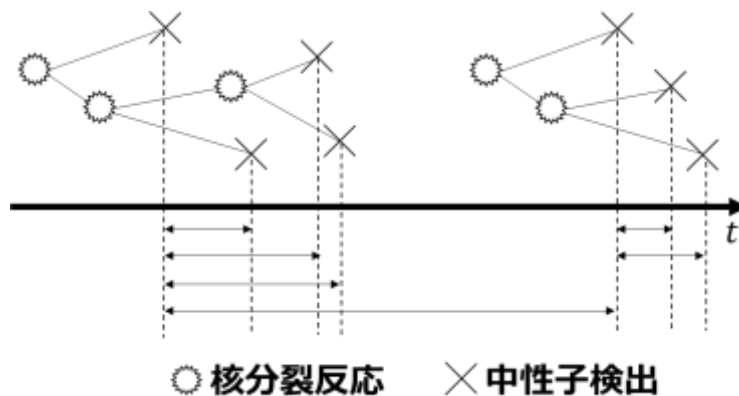


Fig. 1-4 中性子検出時間間隔 τ の概念図

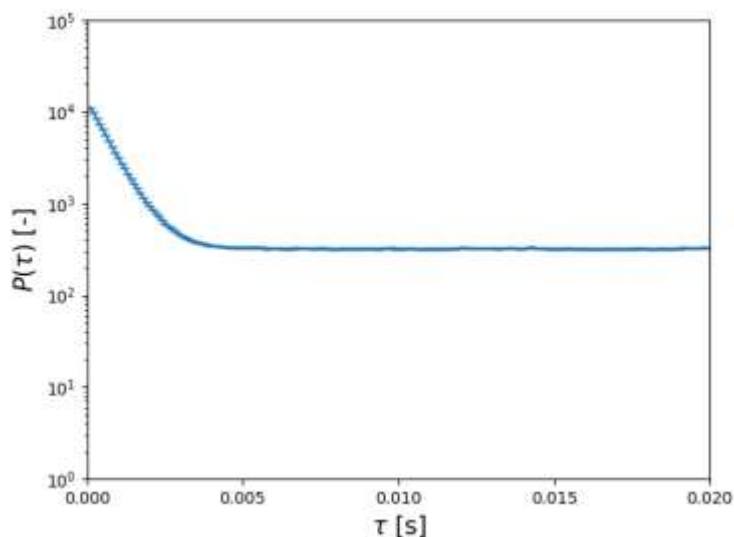


Fig. 1-5 Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の例

1.2 本研究の目的

1.1 節の背景で述べた Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法のいずれの手法も、基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を推定するために、従来法では非線形最小二乗フィッティングを用いている。しかし、非線形最小二乗フィッティングにおいて基本モード成分のみを頑健に抽出できる方法が確立されていないため、高次モード成分の影響により α や面積比の推定結果が検出器位置やマスクング時間によって変化するという課題がある。この問題を解決するための手法として、本研究では近年多分野で応用されている「Dynamic Mode Decomposition (DMD) [26]」と呼ばれる解析手法に着目した。

DMD は実験や数値シミュレーションで得られる時系列データから、体系の振る舞いを複数の動的なモードに分解するデータ駆動型の手法である[26]。DMD の利点は、体系を記述する方程式に依らずに時系列データのみから体系の時空間的な特徴構造を抽出できることであり、その利点から流体分野や動画処理など様々な工学分野で応用されている[27]。原子炉物理学の分野でも、未臨界体系における動特性の低次元化モデルの構築[28]や、べき乗法に基づく k_{eff} 固有値計算の加速手法[29]などの数値解析手法として近年注目されている。

以上より、本研究では、Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法に対して DMD を応用することで、複数の検出器測定結果から基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を頑健に推定することが可能か確認することを目的とした。現状では、DMD は数値シミュレーションに対する適用が主流となっているため、本研究の新規性は実験解析手法として DMD を適用することが挙げられる。

1.3 本論文の構成

本論文は全 6 章構成である。各章には以下のような内容を記述している。

第 1 章では、本研究の背景及び目的を説明した。本研究の背景として、加速器駆動システムと燃料デブリの未臨界監視を挙げた。加速器駆動システムの未臨界監視手法には Simmons-King 法と面積比法があり、燃料デブリの未臨界監視手法としては Rossi- α 法が挙げられる。Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法のいずれも、非線形最小二乗フィッティングにおいて基本モード成分のみを抽出する方法が確立されていないことから、高次モード成分の影響により即発中性子減衰定数 α や面積比の推定結果が検出器位置やマスクング時間に依存するという課題がある。その問題を解決するために Dynamic Mode Decomposition (DMD)と呼ばれる解析手法を Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法に応用し、DMD の適用可能性を確認することを本研究の目的とする。

第 2 章では、本研究で基本モード成分の即発中性子減衰定数 α 及び面積比を推定する手法として適用を試みる DMD について説明する。始めに DMD の理論について説明した後に、

DMD の具体的な計算手順について説明する。DMD には様々な種類があり、本論文では主要な DMD として Standard DMD・Projected DMD・Exact DMD・Total least square DMD の計算手順について纏める。また、DMD により推定した基本モード成分の α あるいは面積比の統計誤差評価方法についても第 2 章で説明する。

第 3 章では、Simmons-King 法に対して DMD を適用した結果について説明する。始めにパルス中性子法における中性子計数率の理論式をグリーン関数に基づいて導出し、理論式が指数関数で表せる複数のモードの足し合わせで記述できることを示す。第 3 章では京都大学臨界集合体実験装置(KUCA)で実施したパルス中性子法実験についても記述する。KUCA におけるパルス中性子法実験では、未臨界度が異なる 2 つの体系で実験を行った。それぞれの未臨界体系で取得したパルス中性子法実験結果に対し、DMD により基本モード成分の α を推定することで、Simmons-King 法に対する DMD の適用可能性を確認した。

第 4 章では、KUCA で取得したパルス中性子法実験結果に対して、DMD を応用して面積比を推定した結果について説明する。第 4 章の初めに、 α 固有関数展開と k_{eff} 固有関数展開を用いて即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積の理論式 A_d を導出し、導出した A_p と A_d の理論式から面積比 A_p/A_d がドル単位未臨界度に相当することを示す。面積比の理論式を示した後、第 3 章で示した KUCA で取得したパルス中性子法実験結果に対して面積比法を適用した結果を示す。未臨界度が異なる 2 つの体系において、DMD を応用して面積比の推定を試み、面積比法に対する DMD の適用可能性を確認した。

第 5 章では、Rossi- α 法に対して DMD を適用した結果について説明する。始めに、Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ を 1 時点検出確率と 2 時点検出確率を用いて導出し、頻度分布 $P(\tau)$ の理論式が指数関数で表せる複数のモードの足し合わせで記述できることを示す。また、第 5 章では KUCA で実施した原子炉雑音測定実験についても説明する。KUCA の原子炉雑音測定実験では複数の実験体系で測定を行った。本論文では、①臨界体系、②全ての制御棒・安全棒を挿入した深い未臨界体系、③運転を停止した最も深い未臨界体系で取得した原子炉雑音測定結果に Rossi- α 法処理を行った。このようにして取得した Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ に対して DMD を適用することで、Rossi- α 法に対する DMD の適用可能性を確認した。

第 6 章では、本研究のまとめと今後の課題について述べる。

参考文献

- [1] 国際シンポジウム開催報告, 日本原子力学会, 平成 15 年 3 月
<http://www.aesj.or.jp/~ndd/ndnews/pdf75/No75-01.pdf> (2021/12/4 アクセス).
- [2] 核破砕中性子源工学概論, 日本原子力研究所(JAERI),
https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/32/036/32036302.pdf
(2022/1/13 アクセス).
- [3] K. Tsujimoto, et al., “Neutronics design for lead-bismuth cooled accelerator-driven system for transmutation of minor actinide,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, 1, pp. 21-36 (2004).
- [4] K. Nishihara, et al., “Neutronics design of accelerator-driven system for power flattening and beam current reduction,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **45**, 8, pp. 812-822 (2008).
- [5] 高野秀機, “高レベル廃棄物処分としての加速器駆動核変換技術の現状と展望,” *RIST ニュース*, **35**, pp.2-18, (2003).
- [6] 丸山博見, 岩崎智彦, 山本章夫, 中島健, 岡島成晃, 熊谷明, “シリーズ 現代核科学の基礎 1 原子炉物理,” 社団法人原子力学会, (2008).
- [7] H. Iwamoto, et al., “On-line subcriticality measurement using a pulsed spallation neutron source,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **54**, 4, pp. 432-443 (2017).
- [8] K. Watanabe, et al., “Real-time subcriticality monitoring system based on a highly sensitive optical fiber detector in an accelerator-driven system at the Kyoto University Critical Assembly,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **57**, 2, pp. 136-144 (2020).
- [9] 塩澤武司, “固有中性子源を用いた中性子源増倍法と Feynman- α 法による未臨界度測定に関する研究,” 修士論文, 名古屋大学, (2015).
- [10] B. E. Simmons, and J. S. King, “A pulsed neutron technique for reactivity determination,” *Nucl. Sci. Eng.*, **3**, 5, pp. 595-608 (1958).
- [11] F. Nishioka, et al., “Applicability of dynamic mode decomposition to estimate fundamental mode component of prompt neutron decay constant from experimental data,” *Nucl. Sci. Eng.*, (2021).
- [12] R. Katano, “Estimation method of prompt neutron decay constant reducing higher order mode effect by linear combination,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 4, pp. 431-439 (2019).
- [13] R. Katano, M. Yamanaka, and C. H. Pyeon, “Application of linear combination method to pulsed neutron source measurement at Kyoto University Critical Assembly,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 12, pp. 1394-1402 (2019).
- [14] R. Katano, M. Yamanaka, and C.H. Pyeon, “Measurement of prompt neutron decay constant with spallation neutrons at Kyoto University Critical Assembly using linear combination method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **57**, 2, pp. 169-176 (2020).
- [15] N. G. Sjöstrand, “Measurements on a subcritical reactor using a pulsed neutron source,” *Arkiv för Fysik*, **11**, pp. 233-246 (1956).

- [16] T. Gozani, “A modified procedure for the evaluation of pulsed source experiments in subcritical reactors,” *Nukleonik*, **4**, pp. 348–349 (1962).
- [17] E. Garelis, and J. L. Russel, “Theory of pulsed neutron source measurements,” *Nucl. Sci. Eng.*, **16**, 3, pp.263–270 (1963).
- [18] 燃料デブリ取り出しの状況, TEPCO,
<http://www.tepco.co.jp/decommission/progress/retrieval/> (2021/12/6 アクセス).
- [19] 福島第一原子力発電所 2 号機原子炉格納容器内部調査実施結果, TEPCO,
<https://www.meti.go.jp/earthquake/nuclear/decommissioning/committee/osensuitaisakuteam/2019/02/3-3-3.pdf> (2021/12/6 アクセス).
- [20] 中長期ロードマップ改訂案について, 廃炉・汚染水対策チーム事務局, 平成 29 年 9 月,
http://www.tepco.co.jp/decommission/information/committee/roadmap/pdf/2017/t170926_03-j.pdf (2021/12/6 アクセス).
- [21] 廃炉に向けたロードマップ, TEPCO,
<https://www.tepco.co.jp/decommission/project/roadmap/> (2021/12/6 アクセス).
- [22] 福島第一原子力発電所燃料デブリ臨界管理に資する基礎臨界データ整備に向けて, 日本原子力研究開発機構 安全研究センター 臨界安全研究グループ, 平成 26 年,
https://www.jaea.go.jp/04/anzen/archives_seikahoukoku/h26/H26PosterCritical.pdf (2021/12/6 アクセス).
- [23] Y. Morimoto, et al., “Proposal of a statistical evaluation method for the criticality of the Fukushima Daiichi Nuclear Power Plants,” *Nucl. Technol.*, **205**, 12, pp.1652–1660 (2019).
- [24] S. Wada, et al., “Sub-criticality monitoring system for the retrieval of fuel debris in Fukushima Dai-Ichi Nuclear Power Plants,” *Proc. ICNC2019*, Paris, France (2019).
- [25] J. D. Orndoff, “Prompt neutron periods of metal critical assemblies,” *Nucl. Sci. Eng.*, **2**, 4, pp. 450-460 (1957).
- [26] P. J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data,” *J. Fluid Mech.*, **656**, pp.5-28, (2010).
- [27] 大道裕也, 五十嵐康彦, “動的モード分解による多次元時系列解析,” 日本神経回路学会誌, **25**, pp.2-9, (2018).
- [28] Z. K. Hardy, J. E. Morel, “Dynamic mode decomposition for subcritical metal systems,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 11, pp.1173-1185, (2019).
- [29] J. A. Roberts et al., “Acceleration of the power method with dynamic mode decomposition,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, 12, pp.1371-1378 (2019).

第2章 Dynamic Mode Decomposition

2.1 本章の概要

本章では、本研究で適用を試みる Dynamic Mode Decomposition (DMD)の理論と計算手順、DMD によって計算した即発中性子減衰定数 α や面積比の統計誤差評価手法について説明する。

2.2 節では、DMD に関する概要を述べ、DMD が時系列データを指数関数の足し合わせに展開する手法であることを説明する。

2.3 節では、DMD において重要な行列である時間発展行列 \mathbf{A} について説明し、時間発展行列 \mathbf{A} を用いてどのように時系列データを指数関数の足し合わせに展開するかについて記述する。

2.4 節では、様々な DMD における時間発展行列 \mathbf{A} の具体的な計算手順について述べる。2.4 節で計算手順の説明を行う DMD は、①通常の「Standard DMD [1]」、②時間発展行列 \mathbf{A} を別の行列に射影する「Projected DMD [1]」、③Projected DMD より厳密に \mathbf{A} の固有ベクトルを表現する「Exact DMD [2]」、④測定データの誤差が大きい場合でも頑健に \mathbf{A} を推定可能な「Total least squares DMD [3],[4]」とする。

2.5 節では、DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を推定した場合における、ランダムサンプリング法[5]を用いた DMD による推定結果の統計誤差評価手法について説明する。

最後に、2.6 節で本章のまとめを述べる。

2.2 DMD の概要

本節では、本研究で適用を試みる DMD の概要について述べる。DMD は、ある動的な系において得られる多次元時系列データを、以下式のような指数関数で表現されるモードの足し合わせに展開し、体系の時空間的な特徴構造を抽出する手法である。

$$\vec{x}(t) = \sum_{m'=1}^m C_{m'} \vec{\psi}_{m'} \exp(\omega_{m'} t) \quad (2-1)$$

DMD では、(2-1)式において足し合わされている個々の関数 $C_{m'} \vec{\psi}_{m'} \exp(\omega_{m'} t)$ を動的モードと呼ぶ。(2-1)式の $C_{m'}$ は各動的モードの展開係数、 $\vec{\psi}_{m'}$ は各動的モードの空間分布を表す固有ベクトル、 $\omega_{m'}$ は各動的モードにおける時間変化の時定数である。

DMD はデータ駆動型の手法であるため、体系の振る舞いを記述する支配方程式が不明な場合でも適用可能である。DMD は流体力学分野[1]で初めに提案された手法であるが、時系列データのみで対象系の時空間的特徴構造を分析可能という利点が着目され、動画処理[6]、

脳波解析[7]、金融資産の価格トレンド予測[8]、感染症の流行解析[9]など様々な分野で応用されている。原子炉物理学の分野でも、未臨界体系における動特性の低次元化モデルの構築[10]や、べき乗法に基づく k_{eff} 固有値計算の加速手法などの数値解析手法[11]として近年注目されている。

多くの分野で DMD の適用が進む中で、DMD は様々な変種が提案されてきた。DMD の変種として、計算コストを削減することでより効率的に計算を行う「Projected DMD [1]」や「Exact DMD [2]」、取得した時系列データにノイズが存在する場合でも頑健な解析結果を得られる手法として提案された「Optimized DMD [12]」、「Noise-corrected DMD [3]」、「Forward-backward DMD [3]」、「Total least squares DMD [3],[4]」などがある。また、DMD では時系列データを次元削減して展開することもでき、削減すべき次元数を一意に決定できる「Sparsity-promoting DMD [13]」や「Adaptive Elastic DMD [8]」なども提案されている。これらの様々な DMD の中で、第 2 章では代表的な DMD として、通常の DMD である Standard DMD に加え、Projected DMD、Exact DMD、Total least squares DMD について説明する。

2.3 DMD の理論

本節では DMD において最も重要な行列である時間発展行列について説明し、時間発展行列からどのようにして(2-1)式が得られるかについて記述する。

ある物理量の時間変化を、複数の位置において測定した場合を考える。本節では、測定を行った位置の数を m 、物理量の時間変化を測定した際の総時間ステップ数を n 、時間ステップ幅を Δt とする。位置数 m と総時間ステップ数 n の大小関係は $m < n$ とする。ここで、各位置における i 番目の時間ステップのデータを、要素数 m のベクトル \vec{x}_i ($1 \leq i \leq n$)とする。DMD では始めに、ベクトル \vec{x}_i を列ベクトルとして並べた 2 つの時系列データ行列 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 を考える。 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 をそれぞれ(2-2)式と(2-3)式で定義する。

$$\mathbf{X}_1 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-1}) \quad (2-2)$$

$$\mathbf{X}_2 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) \quad (2-3)$$

行列 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 は m 行 n 列の行列である。(2-2)式と(2-3)式より、行列 \mathbf{X}_2 は \mathbf{X}_1 の各時間ステップが 1 つ進んだ行列となっている。ここで、ある行列 \mathbf{A} を用いて \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 の関係を次式で近似する。

$$\mathbf{X}_2 \approx \mathbf{A}\mathbf{X}_1 \quad (2-4)$$

(2-4)式より、行列 \mathbf{X}_1 における列ベクトル \vec{x}_i に対して行列 \mathbf{A} を作用させることで、ベクトル \vec{x}_i が 1 ステップ後のベクトル \vec{x}_{i+1} に変換されている。行列 \mathbf{A} は時系列データの時間変化を表現しており、このような行列を時間発展行列という。今回の場合、時間発展行列 \mathbf{A} は m 行 m 列となる。

(2-4)式は、(2-5)式のような差分方程式として解釈できる。

$$\vec{x}_{i+1} = \mathbf{A}_d \vec{x}_i \quad (2-5)$$

(2-5)式は、離散的な時系列データにおいて、各時間ステップのデータが時間発展行列 \mathbf{A}_d に

よって 1 ステップ後のデータに変化していることを示す。(2-5)式は時系列データが離散的な場合であり、測定で得られるデータは全て離散的な時系列データである。

ここで、離散的な時系列データにおける時間ステップ幅が限りなく小さくなったとして、時系列データが連続的であると見なせる場合を考える。この時の時系列データを $\vec{x}(t)$ と置く。時系列データが連続的である場合、DMD では(2-4)式の時間変化が(2-6)式のような微分方程式で表せると仮定する。

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \mathbf{A}_c \vec{x}(t) \quad (2-6)$$

(2-5)式と(2-6)式の時間発展行列は、互いに区別するためそれぞれ \mathbf{A}_c 、 \mathbf{A}_d とした。(2-6)式で示された 1 階微分方程式について、右辺の \mathbf{A}_c が時間 t に依存しない場合には、以下のような解析解を得ることができる。

$$\vec{x}(t) = \exp(\mathbf{A}_c t) \vec{x}(0) \quad (2-7)$$

(2-7)式の $\exp(\mathbf{A}_c t)$ は行列指数関数であり、以下のように定義される。

$$\exp(\mathbf{A}_c t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}_c t)^k}{k!} \quad (2-8)$$

ここで、時間発展行列 \mathbf{A}_c を以下のように固有値分解する。

$$\mathbf{A}_c = \Phi_c \Lambda_c \Phi_c^{-1} \quad (2-9)$$

$$\Phi_c = (\vec{\psi}_1 \quad \vec{\psi}_2 \quad \dots \quad \vec{\psi}_m) \quad (2-10)$$

$$\Lambda_c = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_m \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

(2-10)式の行列 Φ_c は各列に固有ベクトル $\vec{\psi}$ を持つ m 行 m 列のユニタリ行列、(2-11)式の行列 Λ_c は対角成分に固有値 ω を持つ対角行列である。なお、行列 Φ_c^{-1} は Φ_c の逆行列である。(2-9)式より、(2-8)式は以下のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}_c t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Phi_c \Lambda_c \Phi_c^{-1} t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Phi_c (\Lambda_c t) \Phi_c^{-1})^k}{k!} \end{aligned} \quad (2-12)$$

(2-12)式について、行列 Φ_c と Φ_c^{-1} の積は単位行列になるため、 $(\Phi_c (\Lambda_c t) \Phi_c^{-1})^k = \Phi_c (\Lambda_c t)^k \Phi_c^{-1}$ となる。従って、(2-12)式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}_c t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_c (\Lambda_c t)^k \Phi_c^{-1}}{k!} \\ &= \mathbf{E} + \Phi_c (\Lambda_c t) \Phi_c^{-1} + \frac{\Phi_c (\Lambda_c t)^2 \Phi_c^{-1}}{2} + \frac{\Phi_c (\Lambda_c t)^3 \Phi_c^{-1}}{3} + \dots \\ &= \Phi_c \left(\mathbf{E} + \Lambda_c t + \frac{(\Lambda_c t)^2}{2} + \frac{(\Lambda_c t)^3}{3} + \dots \right) \Phi_c^{-1} \end{aligned} \quad (2-13)$$

(2-13)式の**E**は単位行列を表している。(2-13)式より、行列指数関数 $\exp(\mathbf{A}_c t)$ は結果的に以下のように表せる。

$$\exp(\mathbf{A}_c t) = \Phi_c \exp(\Lambda_c t) \Phi_c^{-1} \quad (2-14)$$

(2-14)式における行列指数関数 $\exp(\Lambda_c t)$ は以下のように表せる。

$$\exp(\Lambda_c t) = \begin{pmatrix} \exp(\omega_1 t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(\omega_2 t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \exp(\omega_m t) \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

(2-14)式を(2-7)式に代入することで、 $\vec{x}(t)$ は以下のように表すことができる。

$$\vec{x}(t) = \Phi_c \exp(\Lambda_c t) \Phi_c^{-1} \vec{x}(0) \quad (2-16)$$

また、(2-16)式は次式のように指数関数の足し合わせとして表現することもできる。

$$\vec{x}(t) = \sum_{m'=1}^m C_{m'} \vec{\psi}_{m'} \exp(\omega_{m'} t) \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m)^T \\ &= \Phi_c^{-1} \vec{x}(0) \end{aligned} \quad (2-18)$$

(2-17)式の $C_{m'}$ はDMDにおける各動的モードの展開係数である。また、時間発展行列 \mathbf{A}_c の固有値 $\omega_{m'}$ は、(2-17)式より各動的モードにおける時間変化の時定数と見なすことができる。

DMDでは、行列 \mathbf{A}_c と Φ_c を求めて、時系列データを(2-16)式や(2-17)式の形に展開することが最終的な目標となる。しかし、これまでの説明では、得られた時系列データが連続的であることを仮定している。実際の測定で得られるのは離散的な時系列データであるので、離散的な時系列データから(2-16)式や(2-17)式の形に展開する方法が必要となる。

以上を踏まえた上で、(2-5)式の差分方程式について考える。 i 番目の時間ステップのデータであるベクトル \vec{x}_i は、最初の時間ステップのデータであるベクトル \vec{x}_0 に繰り返し行列 \mathbf{A}_d を作用させることにより得られる。

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &= \mathbf{A}_d \vec{x}_1 \\ \vec{x}_3 &= \mathbf{A}_d \vec{x}_2 = \mathbf{A}_d^2 \vec{x}_1 \\ \vec{x}_4 &= \mathbf{A}_d \vec{x}_3 = \mathbf{A}_d^3 \vec{x}_1 \\ &\vdots \\ \vec{x}_i &= \mathbf{A}_d \vec{x}_{i-1} = \mathbf{A}_d^{i-1} \vec{x}_1 \end{aligned} \quad (2-19)$$

ここで、時間発展行列 \mathbf{A}_d を以下のように固有値分解する。

$$\mathbf{A}_d = \Phi_d \Lambda_d \Phi_d^{-1} \quad (2-20)$$

$$\Phi_d = (\vec{\phi}_1 \ \vec{\phi}_2 \ \dots \ \vec{\phi}_m) \quad (2-21)$$

$$\Lambda_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

(2-21)式の行列 Φ_d は各列に固有ベクトル $\vec{\phi}$ を持つ m 行 m 列のユニタリ行列、(2-22)式の行列 Λ_d は対角成分に固有値 λ を持つ対角行列である。なお、行列 Φ_d^{-1} は Φ_d の逆行列である。(2-20)

式より、(2-19)式は次のように変換できる。

$$\vec{x}_i = \Phi_d \Lambda_d^{i-1} \Phi_d^{-1} \vec{x}_1 \quad (2-23)$$

ここで、(2-16)式の Φ_c, Λ_c と(2-23)式の Φ_d, Λ_d の関係について考える。まず、連続的な時間 t によって表されている(2-7)式を、離散的な時間 $i\Delta t$ を用いて表すことを試みる。 Δt は時系列データの時間ステップ幅である。 $t = i\Delta t$ を(2-7)式に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \vec{x}(i\Delta t) &= \exp(\mathbf{A}_c i\Delta t) \vec{x}(0) \\ &= \exp(\mathbf{A}_c (i-1)\Delta t) \exp(\mathbf{A}_c \Delta t) \vec{x}(0) \\ &= \exp(\mathbf{A}_c \Delta t) \exp(\mathbf{A}_c (i-1)\Delta t) \vec{x}(0) \\ &= \exp(\mathbf{A}_c \Delta t) \vec{x}((i-1)\Delta t) \end{aligned} \quad (2-24)$$

(2-24)式は(2-5)式と同じように、 $(i-1)$ 番目の時間ステップのデータであるベクトル $\vec{x}((i-1)\Delta t)$ が行列指数関数 $\exp(\mathbf{A}_c \Delta t)$ により、1ステップ後のデータであるベクトル $\vec{x}(i\Delta t)$ に変換されていることを示している。(2-24)式と(2-5)式を比較すると、時間発展行列 \mathbf{A}_c と \mathbf{A}_d について次の関係式が得られる。

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}_c \Delta t) \quad (2-25)$$

(2-25)式と(2-14)式より、時間発展行列 \mathbf{A}_d は以下のように表せる。

$$\mathbf{A}_d = \Phi_c \exp(\Lambda_c \Delta t) \Phi_c^{-1} \quad (2-26)$$

ここで、(2-26)式と \mathbf{A}_d を固有値分解した(2-20)式を比べると、以下の関係式が得られる。

$$\Phi_d = \Phi_c \quad (2-27)$$

$$\Lambda_d = \exp(\Lambda_c \Delta t) \quad (2-28)$$

(2-27)式より、 \mathbf{A}_d の固有ベクトル $\vec{\phi}$ と \mathbf{A}_c の固有ベクトル $\vec{\psi}$ は等しいことが分かる。また、(2-28)式より、 \mathbf{A}_d の固有値 λ と \mathbf{A}_c の固有値 ω には以下の関係があることが分かる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \exp(\omega \Delta t) \\ \therefore \omega &= \frac{\ln(\lambda)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2-29)$$

以上より、離散的な時系列データから得られる時間発展行列 \mathbf{A}_d を固有値分解することで、(2-27)式と(2-28)式の関係を用いて時系列データを(2-16)式や(2-17)式の形に展開することができる。

2.4 DMD の計算手順

2.3 節では、DMD における時間発展行列 \mathbf{A} の理論について説明した。DMD は様々な分野で適用されているが、DMD の適用には 2.3 節で述べた時間発展行列 \mathbf{A} の計算が不可欠となる。時間発展行列 \mathbf{A} の計算に当たって、DMD には様々な種類があり、時間発展行列 \mathbf{A} の計算方法や \mathbf{A} の固有ベクトルの表現方法がそれぞれ異なっている。本節では、代表的な DMD として、①通常の「Standard DMD」、②時間発展行列 \mathbf{A} を別の行列に射影する「Projected DMD」、③Projected DMD より厳密に \mathbf{A} の固有ベクトルを表現する「Exact DMD」、④測定データの誤

差が大きい場合でも頑健に \mathbf{A} を推定可能な「Total least squares DMD」における、時間発展行列 \mathbf{A} の計算手順について説明する。2.4.1 項で Standard DMD の計算手順、2.4.2 項で Projected DMD と Exact DMD の計算手順、2.4.3 項で Total least squares DMD の計算手順について説明する。

2.4.1 Standard DMD

2.3 節と同様に、ある物理量の時間変化を、 m 個の位置において、時間ステップ幅 Δt で n ステップに亘って測定した場合を考える。この測定によって得られた時系列データを m 行 n 列 ($m < n$)の行列 \mathbf{X} の形に整理し、この行列 \mathbf{X} の1列目から $(n-1)$ 列目までのデータを取り出した m 行 $(n-1)$ 列の行列を $\mathbf{X}_{1:n-1}$ 、2列目から n 列目を取り出した m 行 $(n-1)$ 列の行列を $\mathbf{X}_{2:n}$ と定義する。2.3 節で述べたように、DMD では $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ の関係を、時間発展行列 \mathbf{A} を用いて次の式で近似する。

$$\mathbf{X}_{2:n} \approx \mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} \quad (2-30)$$

(2-30)式の \mathbf{A} は以下式の条件を満たすように決定される。

$$\min_{\mathbf{A}} \|\Delta\mathbf{X}_{2:n}\|_F, \text{ subject to } \mathbf{X}_{2:n} + \Delta\mathbf{X}_{2:n} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} \quad (2-31)$$

(2-31)式は、 $\mathbf{X}_{2:n}$ と $\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1}$ の差を表す行列 $\Delta\mathbf{X}_{2:n}$ のフロベニウスノルムが最小となるように、時間発展行列 \mathbf{A} を決定するという意味である。行列 $\Delta\mathbf{X}_{2:n}$ の各要素を e_{ij} とすると、 $\Delta\mathbf{X}_{2:n}$ のフロベニウスノルムは次のように表せる。

$$\|\Delta\mathbf{X}_{2:n}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} e_{ij}^2} \quad (2-32)$$

(2-31)式を簡略化した概念図として表すと Fig. 2-1 のようになる。Fig. 2-1 の横軸 x_i は時間ステップ i における測定データ、縦軸 x_{i+1} は横軸の時間ステップ i から1ステップ進んだ $(i+1)$ における測定データである。Fig. 2-1 の黒破線は x_{i+1} と直線 ax_i の差を表し、係数 a は $a = e^{\omega\Delta t}$ となる定数である。ここで、 ω は時系列データにおける時間変化の速さを表す時定数、 Δt は時間ステップ幅である。Standard DMD では、Fig. 2-1 における黒破線長さの二乗和を最小にするように a を決定する。

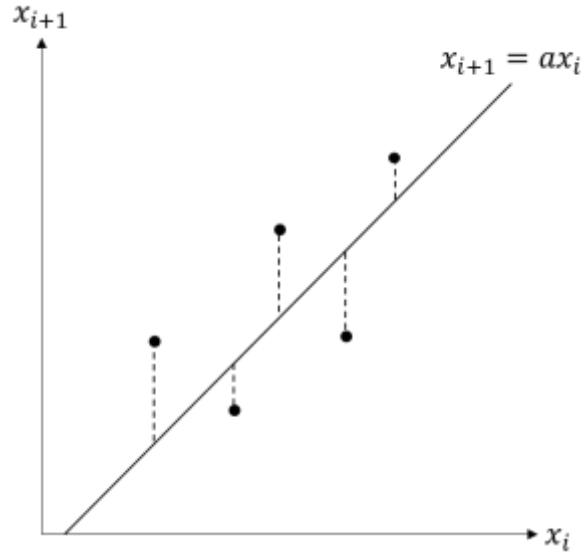


Fig. 2-1 Standard DMD の概念図

ここからは、Standard DMD において(2-30)式の時間発展行列 \mathbf{A} を求める計算手順について説明する。(2-30)式において、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ が正則行列であれば両辺に右から $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の逆行列を掛けることで、時間発展行列 \mathbf{A} は求められる。しかし、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ が正則行列になる場合は極めて少なく($m = n - 1$ を満足した上で、行列のランクが m となる場合のみ)、一般的に $\mathbf{X}_{1:n-1}$ は逆行列をもたない。そこで、任意の行列に対して適用できる特異値分解を活用し、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ を求める。擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ を求めるため、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ を次のように特異値分解する。

$$\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (2-33)$$

(2-33)式の行列 \mathbf{U} は m 行 m 列のユニタリ行列、行列 \mathbf{V} は $(n - 1)$ 行 m 列のユニタリ行列である。また、添え字*は複素共役転置を表す。行列 $\mathbf{\Sigma}$ は対角成分に特異値 σ を持つ m 行 m 列の対角行列であり、以下のように表せる。

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_m \end{pmatrix} \quad (2-34)$$

(2-35)式の特異値 σ は、 $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > \dots > \sigma_m \geq 0$ ($1 \leq r \leq m$)の非負実数値となっている。 $\sigma_m > 0$ の場合ならば行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ のランクは行数 m となるが、 r 番目の特異値 σ_r ($1 < r < m$)で 0 となった場合には行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ のランクは r となる[14]。 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ が特異値分解により(2-33)式のように表すことができれば、擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ は次のように表せる。

$$\mathbf{X}_{1:n-1}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (2-35)$$

(2-30)式の両辺に右から(2-35)式の擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ を掛けることにより、時間発展行列 \mathbf{A} を次のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1}\mathbf{X}_{1:n-1}^+ &= \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{X}_{1:n-1}^+ \\
\mathbf{A}(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*)(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*) &= \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \\
\therefore \mathbf{A} &= \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*
\end{aligned} \tag{2-36}$$

(2-36)式のようにして得られる時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解することにより、 \mathbf{A} の固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得ることができる。

Standard DMD の計算手順を纏めると以下のようなになる。

1. 測定により取得した時系列データ行列 \mathbf{X} から行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ を作成する。
2. $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の特異値分解を行い、 $\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ とする。
3. 時間発展行列 \mathbf{A} を $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*$ という式で計算する。
4. 時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解して固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得る。

2.4.2 Projected DMD, Exact DMD

本項では、参考文献[1]で提案された Projected DMD と、参考文献[2]で提案された Exact DMD の計算手順について説明する。Projected DMD と Exact DMD の計算手順について説明するため、Standard DMD における行列 \mathbf{X} の行数 m (測定位置の数)が非常に大きい場合を考える。行列 \mathbf{X} が m 行 n 列($m < n$)の時、時間発展行列 \mathbf{A} は m 行 m 列となり行列のサイズが非常に大きくなる。行列の固有値計算は、行列の1行当たりの要素数の3乗に比例して計算量が増加するため[15]、そのまま時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解すると膨大な計算コストを要することになる。そこで、Projected DMD と Exact DMD では計算コストを削減するため、 \mathbf{A} の要素数を削減した行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を作成し、 $\tilde{\mathbf{A}}$ に対して固有値分解を行う。

行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を作成するに当たって、まず(2-33)式における $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の特異値分解において低ランク近似[16]を適用する。低ランク近似では、特異値の大きさがゼロに近く、元の行列に与える影響が小さい特異値を無視する。すなわち、(2-35)式において値の大きい順から上位 r 個の特異値のみを残し、 m 行 m 列の行列 $\mathbf{\Sigma}$ を r 行 r 列の行列 $\mathbf{\Sigma}_r$ に縮約(次元圧縮)する。行列 $\mathbf{\Sigma}$ を $\mathbf{\Sigma}_r$ に縮約した場合、(2-33)式における m 行 m 列の行列 \mathbf{U} と m 行 $(n-1)$ 列の行列 \mathbf{V} は、それぞれ m 行 r 列の行列 \mathbf{U}_r と $(n-1)$ 行 r 列の行列 \mathbf{V}_r となる。Projected DMD と Exact DMD では、時間発展行列 \mathbf{A} を低ランク近似で得られる m 行 r 列の行列 \mathbf{U}_r に射影することにより、行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を次のように表す。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{A} \mathbf{U}_r \tag{2-37}$$

低ランク近似により、(2-36)式の時間発展行列 \mathbf{A} が $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1} \mathbf{U}_r^*$ と表せるとすると、(2-37)式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{U}_r^* (\mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1} \mathbf{U}_r^*) \mathbf{U}_r \\
&= \mathbf{U}_r^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1}
\end{aligned} \tag{2-38}$$

(2-38)式で得られる $\tilde{\mathbf{A}}$ は r 行 r 列であるので、 \mathbf{A} を \mathbf{U}_r に射影することにより時間発展行列 \mathbf{A} のサイズが削減されたことを示している。この $\tilde{\mathbf{A}}$ に対して固有値分解を行い、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値と固有ベクトルを得る。

以降では、Projected DMD と Exact DMD において、行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値・固有ベクトルから、時間発展行列 \mathbf{A} の固有値・固有ベクトルを得る方法について説明する。Projected DMD と Exact DMD では、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ は同じ線形写像を表現する相似な行列であると見なす。 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ が相似な行列であるならば、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値は同じとなる。ここで、 \mathbf{A} の固有値・固有ベクトルをそれぞれ $\lambda, \vec{\phi}$ とし、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値・固有ベクトルを $\lambda, \vec{\tilde{\phi}}$ とする。Projected DMD と Exact DMD では、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\vec{\tilde{\phi}}$ から \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ を推定する方法が異なるため、それぞれの DMD における $\vec{\phi}$ の計算方法について記述する。

(a) Projected DMD

参考文献[1]で提案された Projected DMD では、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ が相似な関係であることに基づき、 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\vec{\tilde{\phi}}$ の関係を以下のように表す。

$$\vec{\phi} = \mathbf{U}_r \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-39)$$

但し、(2-39)式で表される $\vec{\phi}$ は、 \mathbf{A} の固有ベクトルを厳密に表現できていない。このことを示すため、以下のような行列 \mathbf{P}_x と行列 \mathbf{B} を定義する。

$$\mathbf{P}_x \equiv \mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^* \quad (2-40)$$

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \quad (2-41)$$

(2-41)式を $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \mathbf{U}_r^*$ と $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1}$ に代入することにより、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ はそれぞれ以下のように表せる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{U}_r^* \quad (2-42)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{B} \quad (2-43)$$

また、行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ について以下の固有値方程式が成り立つとする。

$$\tilde{\mathbf{A}} \vec{\tilde{\phi}} = \lambda \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-44)$$

(2-39)式の Projected DMD で得られる固有ベクトル $\vec{\phi}$ に対して、行列 \mathbf{P}_x と \mathbf{A} の積 $\mathbf{P}_x \mathbf{A}$ を右から作用させると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \mathbf{A} \vec{\phi} &= (\mathbf{U}_r \mathbf{U}_r^*) (\mathbf{B} \mathbf{U}_r^*) \mathbf{U}_r \vec{\tilde{\phi}} \\ &= \mathbf{U}_r (\mathbf{U}_r^* \mathbf{B}) \vec{\tilde{\phi}} \end{aligned} \quad (2-45)$$

(2-43)式の $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{B}$ を(2-45)式に代入する。

$$\mathbf{P}_x \mathbf{A} \vec{\phi} = \mathbf{U}_r \tilde{\mathbf{A}} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-46)$$

(2-44)式の固有値方程式より、(2-46)式は以下のように変形できる。

$$\mathbf{P}_x \mathbf{A} \vec{\phi} = \lambda \mathbf{U}_r \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-47)$$

(2-39)式より、 $\mathbf{P}_x \mathbf{A} \vec{\phi}_i$ は最終的に以下のように表せる。

$$\mathbf{P}_x \mathbf{A} \vec{\phi} = \lambda \vec{\phi} \quad (2-48)$$

(2-48)式より、Projected DMD における固有ベクトル $\vec{\phi}$ は、時間発展行列 \mathbf{A} の固有ベクトルではなく、行列 $\mathbf{P}_x \mathbf{A}$ の固有ベクトルになることを表している。

(b) Exact DMD

次に、Exact DMD における \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ について説明する。Exact DMD は \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ をより厳密に表現する手法として提案された。Exact DMD における \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ は、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\vec{\tilde{\phi}}$ を用いて以下のように表される。

$$\vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-49)$$

(2-41)式の行列 \mathbf{B} を用いると、(2-49)式は以下のように表せる。

$$\vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-50)$$

ここで、ExactDMD で得られる固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ が、時間発展行列 \mathbf{A} の固有値・固有ベクトルに対応することを確認するため、Exact DMD による $\vec{\phi}$ に \mathbf{A} を作用させると以下のようになる。

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{B} \vec{\tilde{\phi}} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B} \mathbf{U}_r^* \tilde{\mathbf{A}} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-51)$$

次に、(2-43)式の $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{B}$ を(2-51)式に代入する。

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{A}} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-52)$$

(2-44)式の固有値方程式より、(2-52)式は次のように変形できる。

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \mathbf{B} \vec{\tilde{\phi}} \quad (2-53)$$

(2-50)式より、 $\mathbf{B} \vec{\tilde{\phi}} = \lambda \vec{\phi}$ であるので、 $\mathbf{A} \vec{\phi}$ は以下のように表せる。

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \lambda \vec{\phi} \quad (2-54)$$

(2-54)式より、Exact DMD で得られる固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ が、時間発展行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルに対応することが確認できた。

以上より、Projected DMD, Exact DMD の計算手順を纏めると以下のようになる。

1. 測定により取得した時系列データ行列 \mathbf{X} から行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ を作成する。
2. $\mathbf{X}_{1:n-1}$ に対して低ランク近似を用いた特異値分解を行い、 $\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^*$ とする。
3. 時間発展行列 \mathbf{A} の要素数を削減した行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1}$ という式で計算する。
4. 行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解して固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\tilde{\phi}}$ を得る。
5. 行列 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ を Projected DMD では $\vec{\phi} = \mathbf{U}_r \vec{\tilde{\phi}}$ 、Exact DMD では

$$\vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \vec{\tilde{\phi}}$$
という式で計算する。

2.4.3 Total least squares DMD

Standard DMD、Projected DMD、Exact DMD では、(2-31)式のような条件に基づいて時間発展行列 \mathbf{A} を推定している。

$$\min_{\mathbf{A}} \|\Delta \mathbf{X}_{2:n}\|_F, \text{ subject to } \mathbf{X}_{2:n} + \Delta \mathbf{X}_{2:n} = \mathbf{A} \mathbf{X}_{1:n-1} \quad (2-31)\text{再掲}$$

(2-31)式では、行列 $\mathbf{X}_{2:n}$ の誤差 $\Delta \mathbf{X}_{2:n}$ のみに着目しており、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の誤差 $\Delta \mathbf{X}_{1:n-1}$ については考慮していない。Standard DMD、Projected DMD、Exact DMD の問題点として、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の誤差を考慮しないことにより、測定で得た時系列データ行列 \mathbf{X} における誤差が大きくなるほど、時間発展行列 \mathbf{A} の推定結果にバイアスが生じることが知られている。この問題を解決するため、元の時系列データ行列 \mathbf{X} における誤差が大きい場合でも、バイアスが低減された形で時間発展行列 \mathbf{A} を推定可能な Total least squares DMD (TLS DMD)が提案された。TLS DMD では、以下式のように $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の誤差 $\Delta \mathbf{X}_{1:n-1}$ を考慮することで、時間発展行列 \mathbf{A} の推定結果におけるバイアスを低減する。

$$\min_{\mathbf{A}} \left\| \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_{1:n-1} \\ \Delta \mathbf{X}_{2:n} \end{bmatrix} \right\|_F, \text{ subject to } \mathbf{X}_{2:n} + \Delta \mathbf{X}_{2:n} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_{1:n-1} + \Delta \mathbf{X}_{1:n-1}) \quad (2-55)$$

(2-55)式は、行列 $\Delta \mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\Delta \mathbf{X}_{2:n}$ を縦に連結させた行列のフロベニウスノルムが最小となるように、時間発展行列 \mathbf{A} を決定するという意味である。Fig. 2-1 と同様に、(2-55)式を簡略化した概念図を Fig. 2-2 に示す。Fig. 2-1 の黒破線は各プロット点と直線 ax_i の距離を表している。(2-55)式は行列 $\Delta \mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\Delta \mathbf{X}_{2:n}$ の各要素の二乗和の平方根(測定データと $\mathbf{X}_{2:n} = \mathbf{A} \mathbf{X}_{1:n-1}$ の距離)が最小になるように \mathbf{A} を決定することを意味するので、TLS DMD では Fig. 2-2 における各プロット点と直線 ax_i の距離が最小となるように a を決定する。

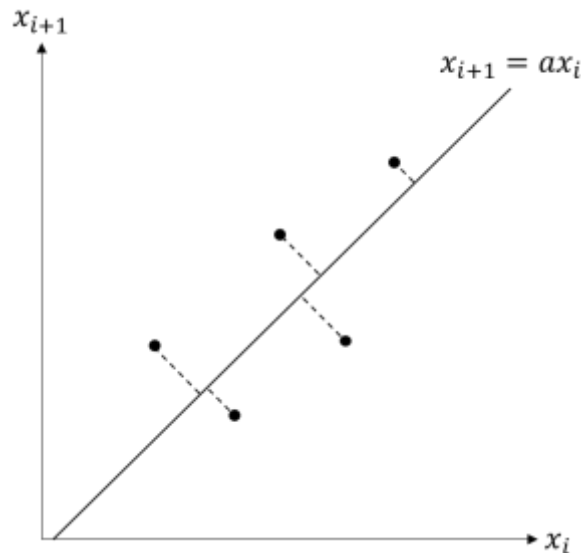


Fig. 2-2 Total least squares DMD の概念図

ここからは、TLS DMD における時間発展行列 \mathbf{A} を求める計算手順について説明する。まず、時系列データ行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ のサイズを m 行 $(n-1)$ 列とする。TLS DMD では、始めに以下のような行列 \mathbf{Z} を定義する。

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1:n-1} \\ \mathbf{X}_{2:n} \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

次に、行列 \mathbf{Z} を以下のように特異値分解する。 \mathbf{Z} の特異値分解を行う際は低ランク近似を適用し、値の大きい順から上位 r 個の特異値のみを残す。

$$\mathbf{Z} = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{Q}^* \quad (2-57)$$

(2-57)式の \mathbf{P} は $2m$ 行 r 列のユニタリ行列、 \mathbf{S} は対角成分に \mathbf{Z} の特異値を持つ r 行 r 列の対角行列、 \mathbf{Q} は $(n-1)$ 行 r 列のユニタリ行列である。添え字*は複素共役転置を表す。特異値分解によって得た行列 \mathbf{Q} を用いて、以下の2つの行列を定義する。

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1} \equiv \mathbf{X}_{1:n-1}\mathbf{Q} \quad (2-58)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{2:n} \equiv \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{Q} \quad (2-59)$$

(2-58)式と(2-59)式における行列 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}$ と $\hat{\mathbf{X}}_{2:n}$ のサイズは m 行 r 列である。TLS DMD では、(2-58)式と(2-59)式で定義された行列 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}$ と $\hat{\mathbf{X}}_{2:n}$ に対して、時間発展行列 \mathbf{A} を用いて以下の関係式を仮定する。

$$\hat{\mathbf{X}}_{2:n} \approx \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1} \quad (2-60)$$

(2-60)式における時間発展行列 \mathbf{A} のサイズは m 行 m 列である。(2-60)式の時間発展行列 \mathbf{A} を求めるため、行列 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}$ を特異値分解する。

$$\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (2-61)$$

ここで、行列 \mathbf{U} は m 行 r 列のユニタリ行列、行列 $\mathbf{\Sigma}$ は対角成分に \mathbf{Z} の特異値を持つ r 行 r 列の対角行列、行列 \mathbf{V} は r 行 r 列のユニタリ行列である。ここで、時間発展行列 \mathbf{A} の要素数を削減する必要がない場合は、(2-35)式のように $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}$ の擬似逆行列 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}^+$ を計算し、 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1}^+$ を(2-60)式の両辺に掛けることにより、時間発展行列 \mathbf{A} を以下のように求めることができる。

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{X}}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (2-62)$$

(2-62)式で得られた時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解することにより、 \mathbf{A} の固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得ることができる。

また、時間発展行列 \mathbf{A} の要素数を削減して、固有値分解の計算コストを低減させたい場合は、(2-37)式のように時間発展行列 \mathbf{A} を行列 \mathbf{U} に射影する。時間発展行列 \mathbf{A} を行列 \mathbf{U} に射影した行列を $\tilde{\mathbf{A}}$ とすると、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は以下のように表せる。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^*\hat{\mathbf{X}}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad (2-63)$$

(2-63)式の行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ のサイズは r 行 r 列である。この行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解することにより、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値と固有ベクトルを得ることができる。 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値 λ は、元の時間発展行列 \mathbf{A} と同じである。 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトルを $\vec{\phi}$ とすると、元の時間発展行列 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ は、Projected DMD の方式を採用する場合は(2-64)式、Exact DMD の方式を採用する場合は(2-65)式で表される。

$$\vec{\phi} = \mathbf{U}\vec{\phi} \quad (2-64)$$

$$\vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \hat{\mathbf{X}}_{2:n} \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \vec{\phi} \quad (2-65)$$

以上より、TLS DMD の計算手順を纏めると以下のようになる。

1. 測定により取得した時系列データ行列 \mathbf{X} から行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ を作成する。
2. 行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ を縦に連結させた行列 $\mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1:n-1} \\ \mathbf{X}_{2:n} \end{bmatrix}$ を作成する。
3. \mathbf{Z} に対して低ランク近似を用いた特異値分解を行い、 $\mathbf{Z} = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{Q}^*$ とする。
4. 特異値分解により得た行列 \mathbf{Q} を用いて、2つの行列 $\hat{\mathbf{X}}_{1:n-1} \equiv \mathbf{X}_{1:n-1}\mathbf{Q}$ と $\hat{\mathbf{X}}_{2:n} \equiv \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{Q}$ を定義する。
5. $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の特異値分解を行い、 $\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^*$ とする。
6. 計算コストを削減する必要がある場合は、時間発展行列 \mathbf{A} を $\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*$ という式で計算する。計算コストを削減する場合は、 \mathbf{A} の要素数を削減した行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^* \hat{\mathbf{X}}_{2:n} \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ という式で計算する。
7. 6で計算した時間発展行列 \mathbf{A} あるいは行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解して固有値と固有ベクトルを得る。
8. 行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値分解で固有値 λ と固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得た時、 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ を Projected DMD の方式に従う場合は $\vec{\phi} = \mathbf{U}\vec{\phi}$ 、Exact DMD の方式に従う場合は $\vec{\phi} = \frac{1}{\lambda} \hat{\mathbf{X}}_{2:n} \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \vec{\phi}$ という式で計算する。

これまでの説明で、Standard DMD、Projected DMD、Exact DMD、TLS DMD の計算手順について記述した。本研究では、これらの DMD の中で実装が比較的容易であり、多くの分野で一般的に用いられている Exact DMD を採用した。従って、第3章から第5章において様々な炉物理実験手法に対して DMD を適用した結果を示しているが、これらの結果はいずれも Exact DMD を適用した結果となっている。

2.5 ランダムサンプリング法を用いた統計誤差評価手法

第1章1.1節の背景で述べたように、本研究では、Simmons-King 法[17]、面積比法[18],[19]、Rossi- α 法[20]といった実験手法に DMD を適用することより、基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比 A_p/A_d を推定することを目的としている。DMD における基本モード成分の α は時間発展行列 \mathbf{A} の固有値から求めることができ、面積比 A_p/A_d は時間発展行列 \mathbf{A} の固有値・固有ベクトルを利用して時系列データを指数関数の和に展開することで得られる。DMD による詳しい α 推定手法は、Simmons-King 法に対する DMD 適用方法を記述した第3章3.3.2項と、Rossi- α 法に対する DMD 適用方法を記述した第5章5.3.2項で説明する。また、DMD による面積比推定手法は第4章4.3.2項で詳しく述べる。DMD による α 推

定手法と面積比推定手法では計算方法がそれぞれ異なるが、 α 推定結果と面積比推定結果における統計誤差評価手法については同じ手法を用いている。従って、本節では、先に α あるいは面積比推定結果の統計誤差評価手法について併せて説明を行う。

DMD による α 推定結果と面積比推定結果の統計誤差評価手法として、誤差伝播則に基づく手法や、ランダムサンプリング法などが挙げられる。誤差伝播則に基づく手法を用いると、DMD による α 推定結果と面積比推定結果の誤差評価式を導出する必要があり、導出される誤差評価式は非常に複雑なものとなる。従って、本研究では数学的に複雑な誤差評価式を導出する必要がなく、測定データのみで DMD 推定結果の統計誤差を評価できるランダムサンプリング法を利用した。本研究のランダムサンプリング法では、測定により得た時系列データ行列 \mathbf{X} の各要素に正規乱数による摂動を加えることにより、 N 個の仮想的な時系列データ行列をサンプリングした。摂動に正規乱数を用いた理由は、本論文で対象とするパルス中性子法実験や炉雑音測定実験では中性子計数率を長時間測定し、中性子計数率の統計誤差を中心極限定理により算出したためである。ここで、行列 \mathbf{X} における i 行 j 列の要素を x_{ij} とし、測定データ点 x_{ij} における誤差を σ_{ij} とする。異なる時間ステップ間の測定データ点について共分散項(相関)を考慮しない場合、摂動により得た k 番目の仮想的な時系列データ $\mathbf{X}^{(k)}$ の各要素 $x_{ij}^{(k)}$ は次のように表せる。

$$x_{ij}^{(k)} = x_{ij} + \sigma_{ij} \mathcal{N}(0,1) \quad (2-66)$$

(2-66)式の $\mathcal{N}(0,1)$ は、平均が 0、標準誤差が 1 となる標準正規乱数である。このように摂動を加えた仮想的時系列データ $\mathbf{X}^{(k)}$ に DMD を適用することにより、基本モード成分の即発中性子減衰定数 $\alpha^{(k)}$ 、あるいは面積比 $(A_p/A_d)^{(k)}$ を計算する。摂動を加えた時系列データ行列に DMD を適用する操作を、 N 個の仮想的時系列データ行列の全てに適用し、 N 個の α 推定結果あるいは面積比推定結果を取得する。そして、得られた N 個の α ・面積比の推定結果についてヒストグラムを作成する。ここで、ランダムサンプリング法におけるサンプルサイズ N の値について考える。参考文献[21]より、ランダムサンプリング法の不確かさにおける相対統計誤差は、 $1/\sqrt{2(N-1)}$ という式で評価できることが分かっている。 $N = 10,000$ のとき $1/\sqrt{2(N-1)} \approx 0.7\%$ となるため、 $N = 10,000$ と設定すればランダムサンプリング法における不確かさの相対統計誤差は 1%未満となることが期待できる。従って、本論文におけるランダムサンプリング法では $N = 10,000$ として統計誤差評価を行った。Fig. 2-3 に $N = 10,000$ としてランダムサンプリング法により得られるヒストグラムの例を示す。Fig. 2-3 のように作成したヒストグラムにおいて平均値と不偏標準偏差を計算し、ヒストグラムの平均値を最終的な α ・面積比の推定結果、不偏標準偏差を α ・面積比の推定結果における統計誤差とする。

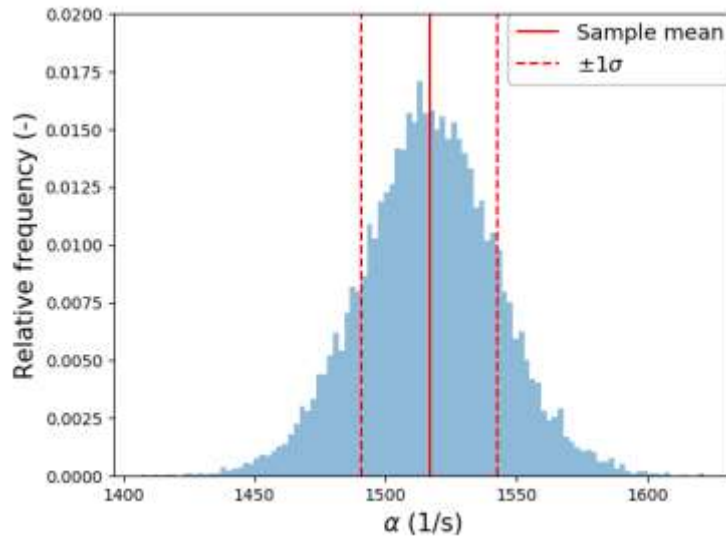


Fig. 2-3 ランダムサンプリング法により得られるヒストグラムの例

最後に、ランダムサンプリング法を用いた DMD における統計誤差評価手法の計算手順を以下で纏める。

1. 測定により取得した時系列データ行列 \mathbf{X} に正規乱数による摂動を加え、仮想的な時系列データ行列 $\mathbf{X}^{(k)}$ を作成する。
2. 仮想的な時系列データ行列 $\mathbf{X}^{(k)}$ に対して DMD を適用することにより、時間発展行列 $\mathbf{A}^{(k)}$ の固有値・固有ベクトルを得る。
3. $\mathbf{A}^{(k)}$ の固有値・固有ベクトルから、基本モード成分の即発中性子減衰定数 $\alpha^{(k)}$ 、あるいは面積比 $(A_p/A_d)^{(k)}$ を計算する。
4. 1~3の手順を N 回繰り返し、 α ・面積比のヒストグラムを作成する。
5. 得られたヒストグラムの平均値を α ・面積比の推定結果とし、ヒストグラムの不偏標準偏差を α ・面積比の統計誤差とする。

2.6 本章のまとめ

本章では、DMD の理論と計算手順、ランダムサンプリング法を用いた DMD における計算結果の統計誤差評価手法について説明した。

2.1 節では、本章の概要を説明した。

2.2 節では、DMD の概要について記述し、DMD はある動的な系で得られる多次元時系列データを指数関数モードの足し合わせに展開するデータ駆動型の手法であることを説明した。また、DMD は様々な分野で適用されており、それぞれの分野における適用目的に応じて多くの DMD の変種が提案されていることも説明した。

2.3 節では、DMD において重要な行列である時間発展行列 \mathbf{A} について説明し、時間発展行

列 \mathbf{A} から時系列データをどのように指数関数の足し合わせに展開するかについて説明した。時間発展行列 \mathbf{A} は、離散的な時系列データにおける各時間ステップのデータを1ステップ後のデータに変換する行列である。DMD では時系列データのみから \mathbf{A} を計算し、計算された \mathbf{A} を固有値分解して固有値 λ ・固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得る。ここで得られた \mathbf{A} の固有値 λ は、 $\omega = \ln(\lambda)/\Delta t$ (Δt は時系列データの時間ステップ幅)という式で DMD における動的モードの時定数 ω に変換することができる。また、 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ は DMD で得られる動的モードの空間分布に対応する。

2.4 節では、「Standard DMD」、「Projected DMD」、「Exact DMD」、「Total least squares DMD (TLS DMD)」における時間発展行列 \mathbf{A} の計算手順を説明した。Standard DMD、Projected DMD、Exact DMD では測定により得た時系列データ \mathbf{X} から、時間ステップが1ステップずれた行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ を始めに作成し、時間発展行列 \mathbf{A} を用いて $\mathbf{X}_{2:n} \approx \mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1}$ という式を仮定する。これら3つのDMDでは、 $\mathbf{X}_{2:n}$ と $\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1}$ の差を表す行列 $\Delta\mathbf{X}_{2:n}$ のフロベニウスノルムが最小となるように \mathbf{A} を推定する。Standard DMD では推定された \mathbf{A} を固有値分解することで、 \mathbf{A} の固有値 λ ・固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得る。一方、Projected DMD と Exact DMD は \mathbf{A} の固有値分解における計算コストを削減するために提案された。Projected DMD と Exact DMD では、 \mathbf{A} を別の低次元化した行列に射影することで、 \mathbf{A} の行列サイズを削減した行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を計算し、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値分解を行うことで $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値 λ ・固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得る。Projected DMD と Exact DMD では、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\vec{\phi}$ から \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}$ を推定する方法が異なっており、Exact DMD は Projected DMD よりも厳密に $\vec{\phi}$ を推定する手法として提案された。最後に TLS DMD は、測定で得た時系列データ行列 \mathbf{X} における誤差が大きい場合でも、頑健に時間発展行列 \mathbf{A} を推定するために開発された。TLS DMD では、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の誤差 $\Delta\mathbf{X}_{1:n-1}$ と $\mathbf{X}_{2:n}$ の誤差 $\Delta\mathbf{X}_{2:n}$ 両方のフロベニウスノルムが最小となるように \mathbf{A} を推定する。TLS DMD で推定された \mathbf{A} の固有値 λ ・固有ベクトル $\vec{\phi}$ を得る方法は、Projected DMD あるいは Exact DMD と同様である。2.4 節では、Standard DMD、Projected DMD、Exact DMD、TLS DMD の計算手順を説明した。本論文ではこれらのDMDの中で、多くの分野で用いられており比較的実装が容易な Exact DMD を採用することとした。

2.5 節では、DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を推定した場合における、DMD 推定結果の統計誤差の評価方法について説明した。本研究では、DMD 推定結果の統計誤差評価手法として、誤差伝播則のように複雑な誤差評価式を導出する必要がなく、測定データのみで統計誤差評価が可能なランダムサンプリング法を用いることとした。本研究のランダムサンプリング法では、測定により得た時系列データ行列に正規乱数による摂動を N 回加えることにより、 N 個の仮想的な時系列データ行列をサンプリングした。この N 個の仮想的な時系列データ行列の全てに DMD を適用することにより、 α あるいは面積比の推定結果のヒストグラムを作成する。作成したヒストグラムの平均値を最終的な α ・面積比の推定結果とし、ヒストグラムの不偏標準偏差を α ・面積比推定結果における統計誤差とした。

参考文献

- [1] P. J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data,” *J. Fluid Mech.*, **656**, pp.5-28 (2010).
- [2] J. H. Tu et al., “On dynamic mode decomposition: theory and applications,” *J. Comput. Dyn.*, **1**(2), pp. 391–421 (2014).
- [3] S. T. M. Dawson et al., “Characterizing and correcting for the effect of sensor noise in the dynamic mode decomposition,” *Exp. Fluids*, **57**, pp. 1–19 (2016).
- [4] M. S. Hemati et al., “De-biasing the dynamic mode decomposition for applied Koopman spectral analysis of noisy datasets,” *Theor. Comput. Fluid Dyn*, **31**, pp. 349–368 (2017).
- [5] T. Endo et al., “Subcriticality measurement using time-domain decomposition-based integral method for simultaneous reactivity and source changes,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **57**, pp. 607–616(2020).
- [6] N. B. Erichson, C. Donovan, “Randomized low-rank dynamic mode decomposition for motion detection,” *Comput. Vis. Image Underst.*, **146**, pp. 40–50 (2016).
- [7] B. W. Brunton et al., “Extracting spatial-temporal coherent patterns in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition,” *J. Neurosci. Methods*, **258**, pp.1–15 (2016).
- [8] 内山祐介, 中川慧, “Adaptive Elastic Dynamic Mode Decomposition を用いたモメンタム戦略の改良,” 人工知能学会研究会資料, https://sigfin.org/?plugin=attach&refer=025-14&openfile=14_SIG-FIN-25.pdf (2021/12/23 アクセス).
- [9] J. L. Proctor, P. A. Eckhoff, “Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition,” *Int. Health*, **7**, pp.139–145 (2015).
- [10] Z. K. Hardy, J. E. Morel, “Dynamic mode decomposition for subcritical metal systems,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, pp.1173-1185 (2019).
- [11] J. A. Roberts et al., “Acceleration of the power method with dynamic mode decomposition,” *Nucl. Sci. Eng.*, **193**, pp.1371-1378 (2019).
- [12] “Variants of dynamic mode decomposition: boundary condition, koopman, and fourier analyses,” *J. Nonlinear. Sci*, **22**, pp. 887-915 (2012).
- [13] M. R. Jovanovic et al., “Sparsity-promoting dynamic mode decomposition,” *Phys. Fluids*, **26**, 024103 (2014).
- [14] 伊理正夫, 児玉慎三, 須田信英, “特異値分解とそのシステム制御への応用,” 計測と制御, **21**(8), (1982).
- [15] 理化学研究所 プレスリリース 2013,
https://www.riken.jp/press/2013/20131205_1/index.html (2021/12/24 アクセス).
- [16] 本山義史, et al., “低ランク近似行列による CNN における畳み込み演算の最適化,” 情報処理学会研究報告, Vol. 2017-HPC-158, No. 25, (2017).

- [17] B. E. Simmons and J. S. King, "A pulsed neutron technique for reactivity determination," *Nucl. Sci. Eng.*, **3**, 5, pp. 595-608 (1958).
- [18] N. G. Sjöstrand, "Measurements on a subcritical reactor using a pulsed neutron source," *Arkiv för Fysik*, **11**, pp. 233-246 (1956).
- [19] T. Gozani, "A modified procedure for the evaluation of pulsed source experiments in subcritical reactors," *Nukleonik*, **4**, pp. 348-349 (1962).
- [20] J. D. Orndoff, "Prompt neutron periods of metal critical assemblies," *Nucl. Sci. Eng.*, **2**, 4, pp. 450-460 (1957).
- [21] B. Foad, A. Yamamoto, and T. Endo, "Uncertainty and regression analysis of the MSLB accident in PWR based on unscented transformation and low rank approximation," *Ann. Nucl. Energy*, **143**, 107493 (2020).

第3章 Simmons-King 法に対する DMD の適用

3.1 本章の概要

本章では、即発中性子減衰定数 α を測定するための実験手法の一つである Simmons-King 法[1]の理論と、京都大学臨界集合体実験装置(Kyoto University Critical Assembly: KUCA)にて実際に行ったパルス中性子法実験結果に対して Dynamic Mode Decomposition (DMD)を適用し、基本モード成分の α を推定した結果について述べる。

第1章 1.1.1 項で述べたように、Simmons-King 法ではパルス中性子法実験における中性子計数率 $C(t)$ を測定し、従来は $C(t)$ に対して指数関数でフィッティングすることで即発中性子減衰定数 α を推定する。従来のフィッティング手法(以降は従来フィッティング法と呼ぶ)により α を推定するに当たって、現状では基本モード成分の α のみを抽出する方法論について未だ検討の余地がある。すなわち、従来フィッティング法による基本モード成分の α 推定結果には、高次モード成分の影響により、本来の基本モード成分の α との系統的な差異(バイアス)が生じ、検出器位置によって異なる推定結果が得られてしまう可能性がある。そこで、Simmons-King 法に対して DMD を適用することを試み、DMD により高次モード成分の影響を低減した形で基本モード成分の α を推定可能か検討することを本章の目的とする。

3.2 節では、パルス中性子法において測定される中性子計数率の理論式を導出する。理論式の導出に当たって、まずグリーン関数について説明し、その解析解の導出を行う。その後、導出したグリーン関数を用いてパルス中性子法の理論式を導出する。

3.3 節では、パルス中性子法における中性子計数率 $C(t)$ から即発中性子減衰定数 α を計算する手法について纏める。本節では、従来フィッティング法と、本論文で新たに適用を試みた DMD による α の推定方法を纏める。

3.4 節では、KUCA で行ったパルス中性子法実験とその解析結果について述べる。最初に KUCA 施設の概要について述べ、その次に KUCA で行ったパルス中性子法実験の実験炉心体系・燃料集合体の構成・使用した検出器と計測機器について纏める。その後、制御棒落下法による制御棒価値の測定結果、ペリオド法による余剰反応度の測定結果を示す。最後にパルス中性子法の実験条件・実験結果を示し、パルス中性子法実験結果に対して DMD と従来フィッティング法を適用した結果について説明する。

最後に、3.5 節で本章のまとめを述べる。

3.2 パルス中性子法の理論

パルス中性子法[1]とは、未臨界体系にパルス状の中性子を周期的に打ち込み、パルス中性子打ち込み後の中性子計数率の時間変化を測定することで、即発中性子減衰定数 α を推定する手法である。本節では、パルス中性子法実験において測定される中性子計数率の理論式を導出し、パルス中性子法の理論式が指数関数の足し合わせで表現できることを説明する。

3.2.1 グリーン関数

本項では、パルス中性子法の理論式導出に用いられるグリーン関数について説明する。

グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ は、時刻 t_0 において位置 \vec{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\vec{\Omega}_0$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t における位置 \vec{r} 、エネルギー E 、方向 $\vec{\Omega}$ の中性子束を表す。グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ は、次の時間依存中性子輸送方程式を解くことにより求められる。

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial G}{\partial t} = -\mathbf{B}G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(E - E_0)\delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0)\delta(t - t_0) \quad (3-1)$$

ここで、(3-1)式の $\mathbf{v}(E)$ は中性子速度、 \mathbf{B} はボルツマン演算子であり、ボルツマン演算子 \mathbf{B} は以下式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \equiv & \vec{\Omega}\nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \\ & - \frac{\chi_p(\vec{r}, E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu_p \Sigma_f(\vec{r}, E') \end{aligned} \quad (3-2)$$

(3-2)式の $\Sigma_t(\vec{r}, E)$ は巨視的全断面積、 $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ は巨視的散乱断面積、 $\Sigma_f(\vec{r}, E')$ は巨視的核分裂断面積、 $\chi_p(\vec{r}, E)$ は核分裂スペクトル、 ν_p は1回の核分裂反応で発生する即発中性子数の期待値である。

グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を導出するため、体系内の中性子束が相対的な空間分布やエネルギースペクトルの形状を保ちつつ、指数関数的に減少していくと仮定した上で、以下の α 固有値方程式を考える[2]。

$$\mathbf{B}\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{\alpha_n}{v(E)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3-3)$$

$$\mathbf{B}^\dagger \psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{\alpha_n}{v(E)} \psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3-4)$$

ここで、 α_n は n 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は α_n に対応する n 次モード成分の固有関数、 $\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の随伴固有関数である。また、(3-4)式の \mathbf{B}^\dagger は \mathbf{B} の随伴演算子であり、以下式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\dagger \equiv & -\vec{\Omega}\nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \\ & - \nu_p \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_p(\vec{r}, E')}{4\pi} \end{aligned} \quad (3-5)$$

固有関数 ψ_n と ψ_n^\dagger の直交条件を考える。(3-3)式の両辺に $\psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間（位置 \vec{r} 、エネルギー E 、方向 $\vec{\Omega}$ で張られる位相空間）で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \psi_m^\dagger \mathbf{B} \psi_n \rangle = \alpha_n \langle \psi_m^\dagger \frac{1}{V} \psi_n \rangle \quad (3-6)$$

(3-6)式の $\langle \quad \rangle$ は全位相空間における積分を表している。同様に、(3-4)式の両辺に $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \psi_n \mathbf{B}^\dagger \psi_m^\dagger \rangle = \alpha_m \langle \psi_n \frac{1}{V} \psi_m^\dagger \rangle \quad (3-7)$$

随伴演算子の性質より、 $\langle \psi_m^\dagger \mathbf{B} \psi_n \rangle = \langle \psi_n \mathbf{B}^\dagger \psi_m^\dagger \rangle$ であるので、(3-6)式と(3-7)式から以下の関係が導ける。

$$(\alpha_n - \alpha_m) \langle \psi_n \frac{1}{V} \psi_m^\dagger \rangle = 0 \quad (3-8)$$

(3-8)式より、 $m \neq n$ の異なる次数において $\alpha_n \neq \alpha_m$ の場合、 $\langle \psi_n \frac{1}{V} \psi_m^\dagger \rangle = 0$ でなければならぬ。一方、 $m = n$ の場合は $\alpha_n = \alpha_m$ なので(3-8)式は満たされる。ここで、簡単のために、固有関数 ψ_n と ψ_n^\dagger の絶対値を以下のように規格化する。

$$\langle \psi_n \frac{1}{V} \psi_n^\dagger \rangle = 1 \quad (3-9)$$

以上より、固有関数 ψ_n と ψ_n^\dagger の直交条件はクロネッカーのデルタ δ_{mn} を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \langle \psi_m^\dagger \frac{1}{V} \psi_n \rangle &= \delta_{mn} \\ &= \begin{cases} 1 & (\text{if } m = n) \\ 0 & (\text{if } m \neq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (3-10)$$

(3-1)式の解を求めるために、グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ が固有関数 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を用いて以下のように展開できるとする。

$$G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3-11)$$

(3-11)式の $g_n(t)$ は n 次モードの展開係数を表す。(3-11)式を(3-1)式に代入し、(3-1)式の両辺に $\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間で積分することにより、展開係数 $g_n(t)$ に関する時間依存微分方程式を以下のように得ることが出来る。

$$\frac{dg_n}{dt} = -\alpha_n g_n(t) + \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) \delta(t - t_0) \quad (3-12)$$

(3-12)式をラプラス変換すると、以下ようになる。

$$s\tilde{g}_n(s) - g_n(t_0) = -\alpha_n\tilde{g}_n(s) + \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) \quad (3-13)$$

ここで、 $t \leq t_0$ において $g_n(t) = 0$ であることを利用すると、 $g_n(t)$ のラプラス変換 $\tilde{g}_n(s)$ は次のように表せる。

$$\tilde{g}_n(s) = \frac{\psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0)}{s + \alpha_n} \quad (3-14)$$

(3-14)式をラプラス逆変換することにより、展開係数 g_n を以下のように求めることが出来る。

$$g_n(t) = \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) e^{-\alpha_n(t-t_0)} \quad (3-15)$$

従って、グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ は以下のように表すことが出来る。

$$G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) e^{-\alpha_n(t-t_0)} \quad (3-16)$$

3.2.2 パルス中性子法の理論式

本項では、3.2.1項で導出したグリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を用いてパルス中性子法の理論式を導出する。

パルス中性子法の理論式を導出するため、時刻 $-iT_0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$)でパルス中性子源 $q_{\text{PNS}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ が一定周期 T_0 でデルタ関数状に打ち込まれたと仮定する。定常状態では、パルス中性子打ち込み開始から十分な時間が経過すると、定常的なバックグラウンド中性子源 $q_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ が存在する。バックグラウンド中性子源 q_{BG} は、核燃料中の自発核分裂や (α, n) 反応、遅発中性子先行核の崩壊などによって生じる。従って、体系内の中性子源 $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ は以下のように表せる。

$$q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = q_{\text{PNS}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta(t + iT_0) \right) + q_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3-17)$$

以上より、パルス中性子法における中性子束 $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ は、グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ と中性子源 $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ の積を以下のように時間積分することにより得られる。

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) &= \int_V dV_0 \int_0^\infty dE_0 \int_{4\pi} d\Omega_0 \int_{-\infty}^t dt_0 q(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0) G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0) \\ &= \int_V dV_0 \int_0^\infty dE_0 \int_{4\pi} d\Omega_0 \int_{-\infty}^t dt_0 \left(q_{\text{PNS}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta(t + iT_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + q_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) e^{-\alpha_n(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3-18)$$

ここで、以下の関係式を定義する。

$$S_{\text{PNS},n} \equiv \int_V dV_0 \int_0^\infty dE_0 \int_{4\pi} d\Omega_0 q_{\text{PNS}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) \quad (3-19)$$

$$S_{\text{BG},n} \equiv \int_V dV_0 \int_0^\infty dE_0 \int_{4\pi} d\Omega_0 q_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi_n^\dagger(\vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0) \quad (3-20)$$

(3-19)式と(3-20)式を用いると、(3-18)式は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{\text{PNS},n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) e^{-\alpha_n t} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\alpha_n T_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{\text{BG},n}}{\alpha_n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{\text{PNS},n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{1 - e^{-\alpha_n T_0}} e^{-\alpha_n t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{\text{BG},n}}{\alpha_n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) e^{-\alpha_n t} + F_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3-21)$$

ここで、 F_n は n 次モード成分の展開係数、 F_{BG} はバックグラウンド成分であり、それぞれ以下のように表せる。

$$F_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \equiv \frac{S_{\text{PNS},n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{1 - e^{-\alpha_n T_0}} \quad (3-22)$$

$$F_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{\text{BG},n}}{\alpha_n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (3-23)$$

従って、パルス中性子法で測定される中性子計数率 $C(t)$ は、巨視的検出反応断面積 Σ_d と中性子束 ψ の積を以下のように全位相空間で積分することで得られる。

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle \Sigma_d \psi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n t} + C_{\text{BG}} \end{aligned} \quad (3-24)$$

ここで、 C_n は n 次モード成分の展開係数、 C_{BG} はバックグラウンド成分であり、それぞれ以下のように表せる。

$$\begin{aligned} C_n &\equiv \langle \Sigma_d F_n \rangle \\ &= \int_V dV \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \Sigma_d(\vec{r}, E) F_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} C_{\text{BG}} &\equiv \langle \Sigma_d F_{\text{BG}} \rangle \\ &= \int_V dV \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \Sigma_d(\vec{r}, E) F_{\text{BG}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3-26)$$

(3-24)式より、パルス中性子法における中性子計数率 $C(t)$ の理論式は指数関数の足し合わせと定常項で記述できる。

3.3 即発中性子減衰定数 α の推定手法

本節では、パルス中性子法実験により中性子計数率の時間変化 $C(t)$ が得られた場合、即発中性子減衰定数 α をどのように推定するかについて説明する。 α を推定するための手法として、従来フィッティング法と、本論文で新たに適用を試みる DMD による α 推定方法を説明する。3.3.1 項で従来フィッティング法による α の推定方法について説明し、3.3.2 項で DMD による α の推定方法について説明する。

3.3.1 従来フィッティング法による α の推定

パルス中性子法実験において、パルス中性子打ち込み後の中性子計数率 $C(t)$ の時間変化が Fig. 3-1 のように測定されたとする。

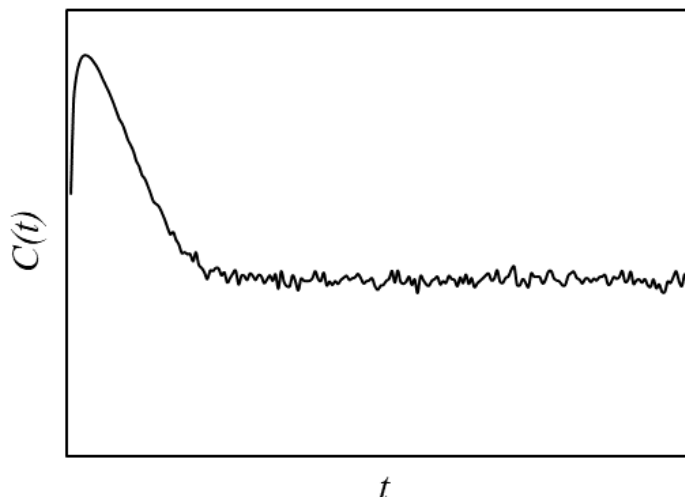


Fig. 3-1 パルス中性子法測定結果の例

従来フィッティング法では、Fig. 3-1 のような中性子計数率の時間変化 $C(t)$ に対して、以下式で非線形最小二乗フィッティングを行うことにより即発中性子減衰定数 α を得る。

$$C(t) = C_0 \exp(-\alpha t) + C_{BG} \quad (3-27)$$

(3-27)式の α 、 C_0 、 C_{BG} はフィッティングパラメータである。なお、3.4.4.2 項で従来フィッティング法による α 推定結果を示すが、この時のフィッティングには、プログラミング言語 Python に存在する最小二乗フィッティングを行うためのモジュール「`scipy.optimize.curve_fit` [3]」を用いている。 α のフィッティング誤差は、「`scipy.optimize.curve_fit`」のオプション「`absolute_sigma`」を「`True`」と設定することで、パルス中性子法実験により得られた $C(t)$ の各時間ステップにおける統計誤差の絶対値を用いて評価した。 $C(t)$ の各時間ステップにおける統計誤差の評価方法は 3.4.4.1 目で説明する。

(3-24)式で示したように $C(t)$ の理論式は指数関数の足し合わせで表現できる。一方、従来

フィッティング法では、(3-27)式のように単一の指数関数でフィッティングを行っている。(3-24)式のように複数の指数関数でフィッティングしない理由は、実際の実験体系において中性子計数率がどの次数の高次モード成分まで展開できるのか事前に解析すること難しく、展開できる高次モード成分の次数が求まったとしても、各高次モード成分におけるフィッティングパラメータの初期値を容易に決定できないからである。従って、単一の指数関数を用いたフィッティングにより基本モード成分の α を推定するためには、マスクング時間を設定して、 $C(t)$ において高次モード成分が残存している時間領域を削除しなければならない。従来フィッティング法では、解析者側が設定するマスクング時間の値によって α 推定結果が変化するという問題点が存在する。また、複数の検出器を使用した場合、検出器位置によって α 推定結果が異なるという問題点も存在する。従って、従来フィッティング法では、数値計算などで予め α の参考値が与えられていない場合、 α の値を一意に決定することが難しいという課題がある。

3.3.2 DMD による α の推定

m 個の検出器を用いて、パルス中性子法の中性子計数率 $C(t)$ を時間ステップ幅 Δt で n ステップに亘って測定した場合を考える。検出器数 m と時間ステップ数 n の大小関係は $m < n$ である。複数の検出器により得られた中性子計数率 $C(t)$ を m 行 n 列の行列 \mathbf{X} として整理する。DMD は時系列データを複数の指数関数の足し合わせに分解する手法であるため、DMD をパルス中性子法測定結果に適用するためには、 $C(t)$ の理論式における定常項 C_{BG} は差し引く必要がある。 $C(t)$ における定常項 C_{BG} を差し引くため、行列 \mathbf{X} の $(m+1)$ 行目に全時間ステップに渡って1となる定常信号を加える[4]。ここで、行列 \mathbf{X} の1列目から $(n-1)$ 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{1:n-1}$ 、行列 \mathbf{X} の2列目から n 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{2:n}$ として以下式を仮定する。

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{X}_{2:n} \quad (3-28)$$

(3-28)式の行列 \mathbf{A} は時間発展行列である。時間発展行列 \mathbf{A} を求めるため、 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ の擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ を計算する。 $\mathbf{X}_{1:n-1}$ を特異値分解すると(3-29)式のように表せるため、擬似逆行列 $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ は(3-30)式のように表せる。

$$\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (3-29)$$

$$\mathbf{X}_{1:n-1}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (3-30)$$

(3-29)式と(3-30)式の行列 \mathbf{U} と \mathbf{V} はユニタリ行列、 $\mathbf{\Sigma}$ は対角成分が特異値となる対角行列である。また、 $*$ は複素共役転置を表す。(3-28)式の両辺に $\mathbf{X}_{1:n-1}^+$ を掛け合わせることにより、時間発展行列 \mathbf{A} を以下のように得る。

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (3-31)$$

次に、本研究では Exact DMD を採用しているため、時間発展行列 \mathbf{A} を行列 \mathbf{U} に射影して行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を計算する。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} \quad (3-32)$$

$$= \mathbf{U}^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V} \Sigma^{-1}$$

計算された行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解することで、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ が得られる。 $\tilde{\mathbf{A}}$ と \mathbf{A} は相似な行列であるため、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値は等しくなる。こうして得られた固有値 λ_i より、以下式によって各モード成分の時定数 ω_i に変換できる。

$$\omega_i = \frac{\ln(\lambda_i)}{\Delta t} \quad (3-33)$$

即発中性子減衰定数は負の時定数であるので、各モード成分の即発中性子減衰定数 α_i は以下のように定義される。

$$\alpha_i \equiv -\omega_i \quad (3-34)$$

この DMD による α 推定手法では、 $\mathbf{C}(t)$ における定常項 \mathbf{C}_{BG} を差し引いた上で基本モード成分の α を推定するため、行列 \mathbf{X} に全時間ステップに亘って 1 となる定常信号を加えている。定常信号を加えた場合、時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値 λ_{max} は 1 となり、最大固有値 λ_{max} に対応するモードは、定常項 \mathbf{C}_{BG} に対応する定常モード($\omega_{\text{max}} = \ln(\lambda_{\text{max}})/\Delta t = 0$)となる。従って、基本モード成分の α は、最大固有値 $\lambda_{\text{max}} = 1$ を除いて 2 番目に最大となる固有値によって、以下のように計算される。

$$\alpha = -\frac{\ln(\max(\lambda_{i'}))}{\Delta \tau} \quad \text{where } \lambda_{i'} < \lambda_{\text{max}} \quad (3-35)$$

3.4 京都大学臨界集合体実験装置を利用したパルス中性子法実験

本節では、2019年10月21日(月)から同年11月1日(金)までの期間に、京都大学臨界集合体実験装置(Kyoto University Critical Assembly: KUCA)にて行ったパルス中性子法実験とその解析結果について述べる。本実験は、実際のパルス中性子法測定結果を用いて DMD により基本モード成分の α の推定を試みることで、Simmons-King 法に DMD が適用可能か確認することを目的として実施した。

本節では、まず 3.4.1 項で KUCA 施設の概要について述べる。次に、3.4.2 項で今回の KUCA 実験における実験体系について説明する。その後、3.4.2 項で説明した実験体系における制御棒価値と余剰反応度の測定結果を 3.4.3 項で述べる。最後に、制御棒・安全棒挿入条件を変化させ、未臨界度の異なる 2 つの実験体系でパルス中性子法実験を実施した結果を 3.4.4 項で示す。3.4.4 項では、2 つの実験体系で取得したパルス中性子法測定結果に対して従来フィッティング法と DMD を適用し、両手法における基本モード成分の α 推定結果の比較についても示す。

3.4.1 KUCA の概要

本実験で利用した京都大学臨界集合体実験装置(KUCA)について述べる。KUCA は世界的にも数少ない複数架台方式の臨界実験装置であり、A、B、C の3つの架台のうちいずれかの炉心を一式の制御棒駆動機構で運転することができる。A 架台と B 架台は、主にポリエチレンを減速材として用いる固体減速架台であり、C 架台は軽水を減速材として用いる軽水減速架台である。複数架台方式の採用によって、KUCA では変化に富んだ多様な研究テーマに対応できるため、日本全国の大学の共同利用研究施設として活用されている[5]。

3.4.2 実験体系

本項では、2019年10月21日(月)から同年11月1日(金)にかけて行った KUCA 実験における炉心体系、装荷された燃料集合体、使用された検出器・計測機器について纏める。

3.4.2.1 実験炉心体系

本実験は、固体減速材を用いた A 架台において実験を行った。A 架台で実験を行った理由は、A 架台ではパルス中性子法実験を行うための加速器駆動中性子源を使用することができるからである[6]。本実験ではこの A 架台において、「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」という名称の炉心を構築した。この炉心では、中心部に燃料として濃縮ウランのみを含む「1/8”p60EUEU 燃料集合体」と「1/8”p10EUEU 燃料集合体」、そして濃縮ウランと天然ウランを含む「EU-AI-NU-AI-EU 燃料集合体」の3種類の燃料集合体を用いており、周辺部に減速材としてポリエチレンを用いている。本実験で使用した A 架台を上面から撮影した写真を Fig. 3-2 に示す。

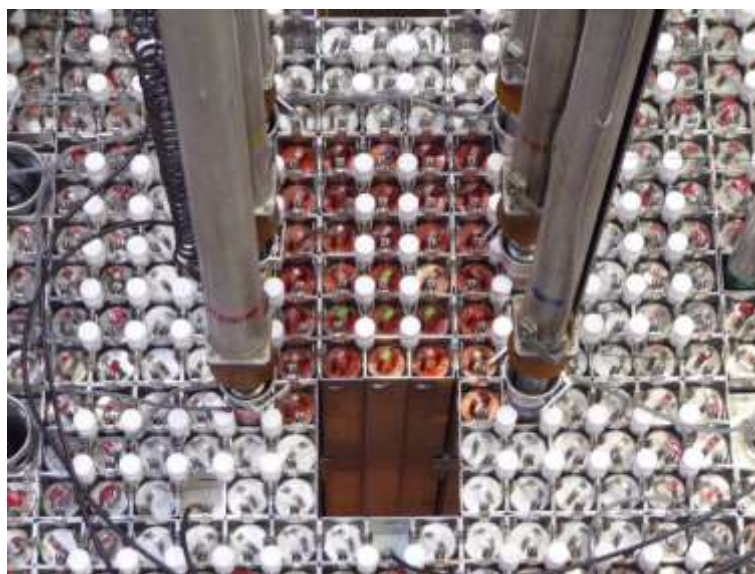


Fig. 3-2 KUCA の A 架台の写真(2019年10月23日撮影)

次に、実験体系の炉心模式図を Fig. 3-3 に示す。Fig. 3-3 の格子位置「く-12」の 1 か所のみ部分長燃料である $1/8''\text{p}10\text{EUEU}$ 燃料集合体になっている。この格子位置のみ部分長燃料になっている理由は、炉心の余剰反応度を調整するためである。燃料領域の最外周の外側には、炉の制御を行うための 3 本の制御棒(C1,C2,C3)と 3 本の安全棒(S4,S5,S6)が配置されている。そして、燃料領域の周辺部にはポリエチレン減速材、ポリエチレン反射体、核計装、Am-Be 中性子源が設置されている。KUCA 架台に設置されている、運転時の中性子束監視に用いられている核計装は、3 個の核分裂電離箱(Fission Chamber: FC)と 3 個の非補償型電離箱(Uncompensated Ionization Chamber: UIC)の 2 種類がある。FC は低出力領域の計測を受け持ち、UIC は FC よりも高い出力領域を受け持つ[5]。UIC の測定データはペリオド法による余剰反応度測定に使用した。さらに、本実験では FC の他に追加の検出器として、 BF_3 検出器と光ファイバー検出器を使用した。 BF_3 検出器と光ファイバー検出器の設置位置については 3.4.4 項で示す。Fig. 3-3 のグリッド「さ-20」に設置されている Am-Be 中性子源は、炉を起動するための中性子源として用いられる[5]。Fig. 3-3 の中央付近に位置している青枠で囲まれた 3×3 領域は中心架台と呼ばれ、この領域に配置した $1/8''\text{p}60\text{EUEU}$ 燃料集合体 3 本とポリエチレン減速材 6 本は、中心架台の落下により炉心から引き抜くことができる。また、炉の最外周には炉心の耐熱性を補強するための黒鉛反射体が設置されている。なお、本実験で使用した加速器駆動中性子源については、FFAG (Fixed-Field Alternating Gradient) 加速器[7],[8]と Pb-Bi ターゲットを用いた。FFAG 加速器で加速された陽子を Pb-Bi ターゲットに照射して核破砕反応を起こし、核破砕反応により生じた中性子をパルス中性子法実験におけるパルス中性子源とした。



Fig. 3-3 A1/8"EUEU(3)+LEU 炉心の概略図

3.4.2.2 燃料集合体の構成

3.4.2.1 項で述べたように、本実験で使用した燃料集合体は、濃縮ウランのみを含む「1/8"p60EUEU 燃料集合体」と「1/8"p10EUEU 燃料集合体」、そして濃縮ウランと天然ウランを含む「EU-AI-NU-AI-EU 燃料集合体」の3種類である。本項では、それらの燃料集合体の構成について説明する。

まず、1/8"p60EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 3-4 に示す。Fig. 3-4 に示した 1/8"p60EUEU 燃料集合体では、中心部に 93%濃縮ウラン板(厚さ 1/16")2 枚とポリエチレン板(厚さ 1/8")1 枚からなる単位セルを 60 個配置した。ここで、燃料の濃縮ウランは通常の軽水炉で用いられているウラン酸化物ではなく、アルミニウムとの合金である[6],[9]。

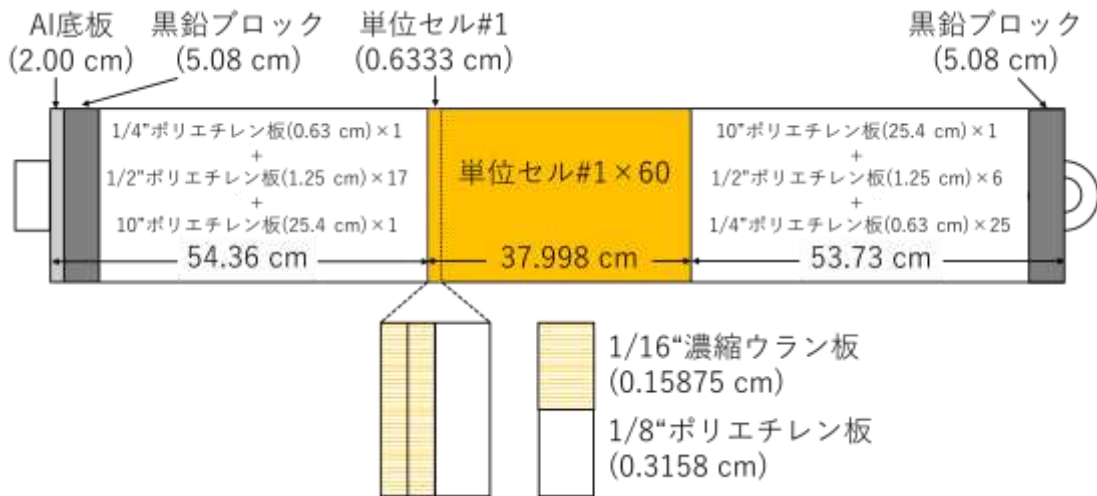


Fig. 3-4 1/8"p60EUEU 燃料集合体の構成図

次に、1/8"p10EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 3-5 に示す。Fig. 3-5 に示された 1/8"p10EUEU 燃料集合体では、中心部に単位セル#1 を 10 個、燃料集合体両端に単位セル#2 を 25 個ずつ配置した。燃料集合体両端に単位セル#2 を 25 個ずつ配置した理由は、1/8"p10EUEU 燃料集合体と 1/8"p60EUEU 燃料集合体の垂直方向の中心位置を一致させるためである。

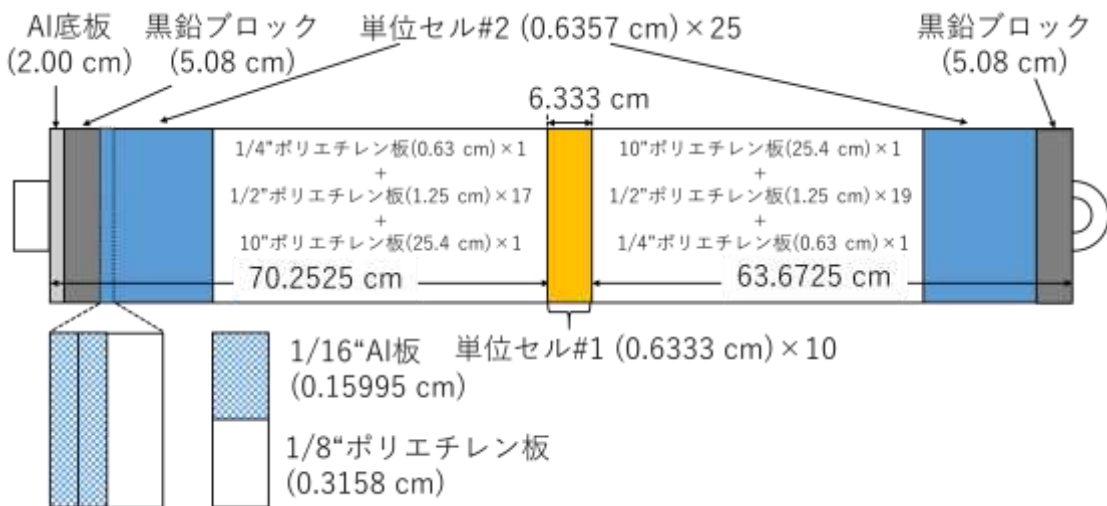


Fig. 3-5 1/8"p10EUEU 燃料集合体の構成図

最後に、EU-Al-NU-Al-EU 燃料集合体の構成図を Fig. 3-6 に示す。Fig. 3-6 に示された燃料集合体は、中心部に単位セル#3 を 20 個使用しており、単位セル#3 で構成された中心部の両側に単位セル#1 を 10 個ずつ配置した。

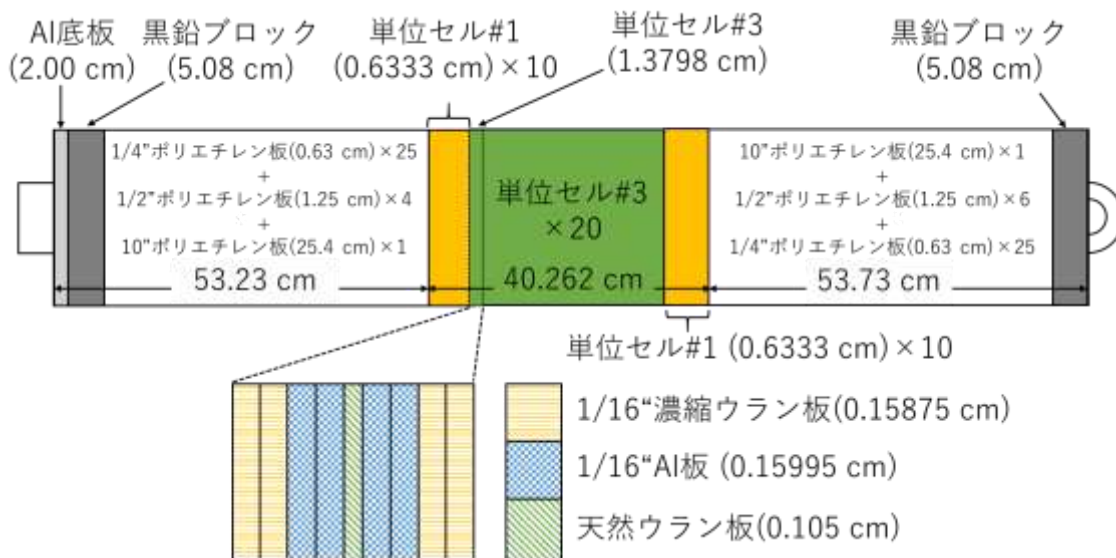


Fig. 3-6 EU-AI-NU-AI-EU 燃料集合体構成図

3.4.2.3 使用した検出器と計測機器

3.4.2.1 項で述べたように、本実験では KUCA 架台に設置されている核分裂電離箱(FC)の他に、追加の検出器として BF_3 検出器と光ファイバー検出器を用いた。これは、DMD を実験データに対して適用するためには、様々なモード成分に由来する測定データをより多く取得する必要があるからである。本項ではそれらの検出器についてまとめる。

最初に BF_3 検出器について説明する。 BF_3 検出器は、検出器内部の BF_3 ガスと中性子による $^{10}\text{B}(n, \alpha)$ 反応を利用する検出器である[10]。本実験では、合計 4 つの BF_3 検出器(BF_3 #1, #2, #3, #4)を使用し、それぞれ炉心の減速材領域に設置した。実験で使用した BF_3 検出器の写真と、 BF_3 検出器の幾何形状を表した図を Fig. 3-7 と Fig. 3-8 にそれぞれ示す。Fig. 3-8 において、黄色で示した部分が BF_3 検出器の有感領域となっている。



Fig. 3-7 BF_3 検出器の写真(2019年10月21日撮影)

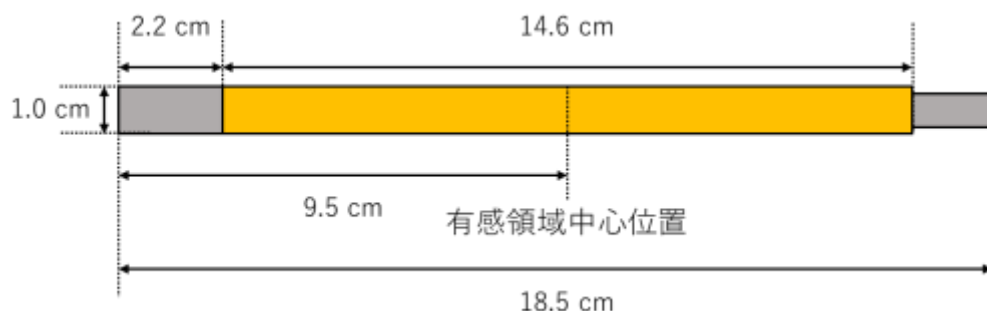


Fig. 3-8 使用した BF₃ 検出器の幾何形状

BF₃ 検出器は、検出器装荷用の穴あきポリエチレンブロックで構成された減速体内に装荷した。BF₃ 検出器装荷用減速体の下部の反射体は、BF₃ 検出器の有感部の中心が炉心の燃料領域の垂直方向の中心位置と一致するように設置した。中心位置の決定には、Fig. 3-4 に示された 1/8”p60EUEU 燃料集合体の中心位置を目安とした。Fig. 3-9 に BF₃ 検出器を装荷した減速体の構成図を示す。Fig. 3-9 に示した BF₃ 検出器装荷用減速体では、アルミニウム底板と黒鉛ブロックを 1 つずつ最下部に設置し、その上に 22.5”になるように 1/2”ポリエチレン板 5 枚と 10”のポリエチレンブロック 2 本を装荷した。さらに、その上に直径 1.5 cm の穴が開いている検出器装荷用の穴あきポリエチレンブロック(16.0 cm)を 5 個装荷した。

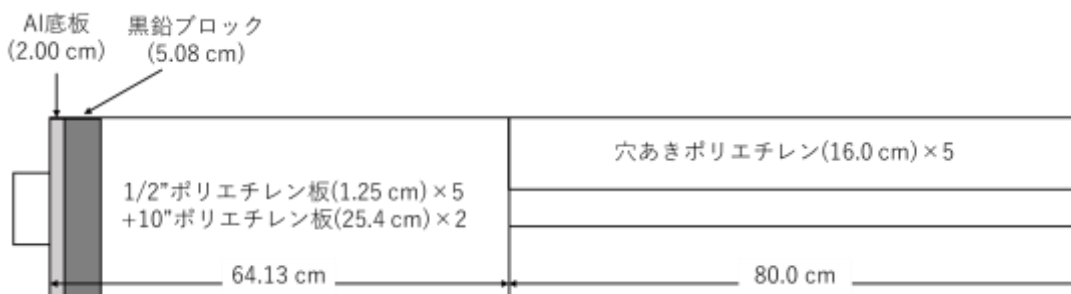


Fig. 3-9 BF₃ 検出器装荷用減速体の構成図

次に光ファイバー検出器について説明する。光ファイバー検出器は、検出器に放射線が入射した際に発生する蛍光パルスをも光ファイバーケーブルで伝送することにより、放射線の量を測定する検出器である[11]。本実験では、合計 4 つの光ファイバー検出器 (Fiber #1, #2, #3, #4) を使用し、それぞれ炉心の燃料領域に設置した。Fiber #1, #2, #3 はシンチレータとして LiFCaF [12] が用いられており、検出器の有感部の中心となる先端約 2 cm の位置が、燃料集合体の中心位置(燃料集合体の下部から約 73.6 cm)と一致するように燃料集合体に固定した。Fiber #4 はシンチレータとして LiF/Eu:CaF₂ 共晶体が用いられており、検出器の先端約 1 cm の部分が、燃料集合体の中心位置(燃料集合体の下部から約 73.6 cm)と一致するように燃料集合体に固定した。

最後に核分裂電離箱(FC)について説明する。FCでは、電離箱内の核分裂反応により生じた核分裂片が封入ガスを電離し、電圧を印加してすることにより電荷を電極に収集することにより計測を行う[10]。本実験では、2つのFC(FC#1,#2)を中性子計数時系列データ取得のために使用した。但し、FC#3はFFAG加速器からの陽子ビームの入射位置に近く、中性子計数の数え落としが生じると考えられたので、パルス中性子法の測定では使用しなかった。

以上より、本実験では4個のBF₃検出器、4個の光ファイバー検出器、2個のFCで合計10個の検出器を用いて、パルス中性子法実験による中性子計数を計測した。また、本実験では各検出器の検出器信号を記録する計測機器として、ANSeeN製MCA(Multi Channel Analyzer)とTNB工房製MCAを用いた。ANSeeN製MCAについては、名古屋大学所有のものとKUCA所有のもので2つ使用した。本実験の計測システムの概略図をFig. 3-10からFig. 3-13に示す。それぞれの計測機器には複数のチャンネルがあり、各検出器の信号はそれぞれに対応する計測機器のチャンネルに記録される。各検出器と計測機器のチャンネル対応をTable. 3-1に示す。なお、今回行ったパルス中性子法実験では、一定時間周期でFFAG加速器から炉心に100 MeVの陽子ビームが打ち込まれており、陽子ビームが打ち込まれた時間が全ての計測機器でビームトリガー信号として記録されている。パルス中性子法実験の解析において、ビームトリガー信号は一定時間周期内の各検出器の信号を中性子計数に変換するために必要となる。

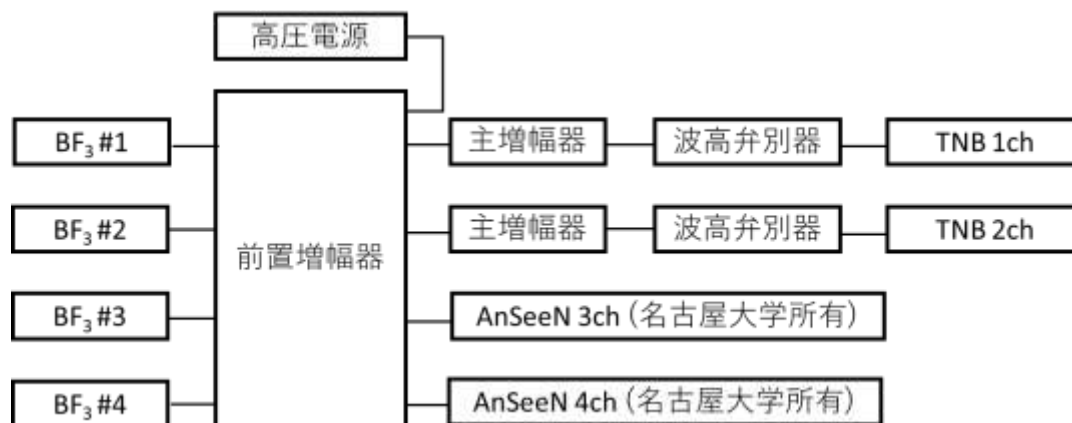


Fig. 3-10 BF₃検出器の測定システム

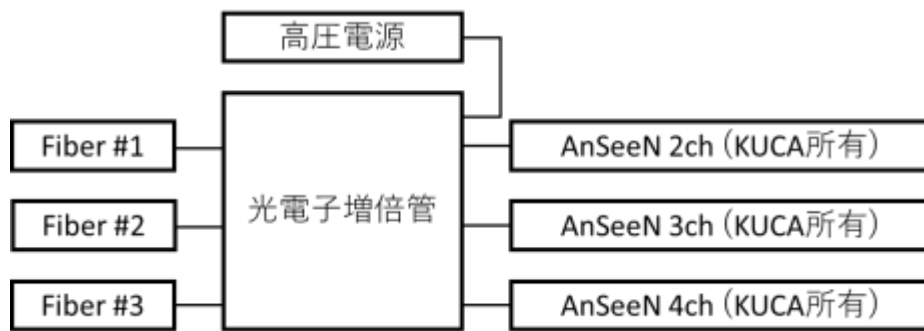


Fig. 3-11 Fiber #1~#3 の測定システム

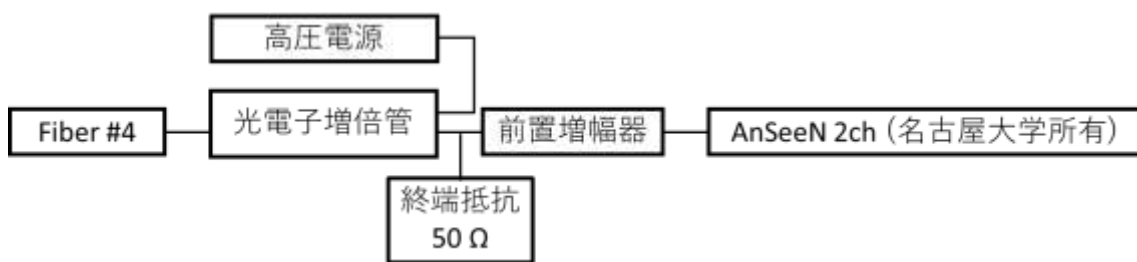


Fig. 3-12 Fiber #4 の測定システム



Fig. 3-13 核分裂電離箱(FC)の測定システム

Table. 3-1 各検出器と計測機器のチャンネル対応

計測機器	入力 チャンネル	接続した信号
ANSeeN 製 MCA (KUCA 所有)	1	ビームトリガー信号
	2	Fiber #1
	3	Fiber #2
	4	Fiber #3
ANSeeN 製 MCA (名古屋大学所有)	1	ビームトリガー信号
	2	Fiber #4
	3	BF ₃ #3
	4	BF ₃ #4
TNB 工房製 MCA	0	ビームトリガー信号
	1	BF ₃ #1
	2	BF ₃ #2
	3	FC #1
	4	FC #2

3.4.3 制御棒価値と余剰反応度の測定

本項では、実験体系における制御棒価値と余剰反応度の測定結果について述べる。本実験では、制御棒価値の測定には制御棒落下法[5],[13]、余剰反応度の測定にはペリオド法[5],[13]を用いた。制御棒落下法による制御棒価値の測定結果を 3.4.3.1 目、ペリオド法による余剰反応度の測定結果を 3.4.3.2 目に示す。

3.4.3.1 制御棒落下法による制御棒価値測定

制御棒落下法とは、原子炉を臨界状態で一定時間保った後、制御棒を急速に落下させて負の反応度を添加し、制御棒落下前後における体系内の中性子計数率から制御棒のドル単位反応度価値($-\rho/\beta_{\text{eff}}$)を測定する手法である。

ここで、制御棒落下法の理論式について説明する。制御棒落下法の理論式は、体系内の中性子数の時間変化を記述する一点炉動特性方程式から導出することができる。一点炉動特性方程式は以下の 2 式からなる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\text{eff}}}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (3-36)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (3-37)$$

ここで、 $n(t)$ は中性子数(-)、 $C_i(t)$ は*i*群の遅発中性子先行核数(-)、 λ_i は*i*群の遅発中性子先行核の崩壊定数(1/s)、 β_i は*i*群の遅発中性子割合(-)、 $\beta_{\text{eff}}(\equiv \sum_{i=1}^6 \beta_i)$ は実効遅発中性子割合(-)、

Λ は中性子生成時間(s)、 ρ は添加された反応度(-)である。(3-36)式と(3-37)式をラプラス変換して解くと次の式が得られる。

$$\tilde{n}(s) = n(0) \frac{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{s + \lambda_i}}{s\Lambda + s \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{s + \lambda_i} - \rho} \quad (3-38)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{n}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} n(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} n(t) dt \end{aligned} \quad (3-39)$$

の関係があるため、(3-38)式において $s \rightarrow 0$ の極限を取ると以下式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} n(t) dt &= n(0) \frac{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\lambda_i}}{-\rho} \\ &= n(0) \frac{\Lambda + \beta_{\text{eff}} \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{\lambda_i}}{-\rho} \end{aligned} \quad (3-40)$$

ここで、 $a_i \equiv \beta_i / \beta_{\text{eff}}$ は相対収率と呼ばれるパラメータである。(3-40)式において、 Λ は $\beta_{\text{eff}} \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{\lambda_i}$ に比べて無視できるので、次式でドル単位の未臨界度を表すことができる。

$$\frac{-\rho}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n(0) \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{\lambda_i}}{\int_0^{\infty} n(t) dt} \quad (3-41)$$

制御棒落下法では、始めに臨界状態における中性子計数率 $n(0)$ を測定した後に、制御棒価値測定対象の制御棒を落下させる。実験者が積分時間 T を設定し、制御棒落下後から積分時間 T までの中性子総計数 $\int_0^{\infty} n(t) dt$ を測定することで、(3-41)式を用いてドル単位の未臨界度を推定する。

ここからは、実施した制御棒落下法の実験条件について述べる。制御棒落下法の測定では核分裂電離箱 FC#1~#3 を使用した。実験では、まず測定対象の制御棒を全引き抜きにした状態で、残りの制御棒の挿入量を調節して炉を臨界状態に保った。この時、3本の安全棒は全て全引き抜き状態であった。臨界状態において10秒間の中性子計数測定を5回繰り返し、5回の平均値を制御棒落下前の中性子計数率 $n(0)$ とした。その後、測定対象の制御棒を落下させて積分値 $\int_0^{\infty} n(t) dt$ を測定した。積分値 $\int_0^{\infty} n(t) dt$ を測定するための積分時間 T (s)は理論上 $T = \infty$ であるが、現実の実験では有限時間の測定しか行えない。従って、積分時間 T (s)は、KUCAにおいて中性子計数率が2 cps以下になると発せられるアラートの時間を目安に決定した[14]。

制御棒価値測定時における初期状態の制御棒・安全棒位置を Table. 3-2 に示す。また、各

制御棒における、制御棒落下前の 5 回の 10 秒間測定結果と、制御棒落下後の中性子計数率の積分値測定結果を Table. 3-3 から Table. 3-5 に示す。Table. 3-3 から Table. 3-5 には、各検出器の「重み」も記載している。使用した検出器の内、落下させた制御棒に最も近い位置に存在する検出器は、制御棒落下による中性子束変化の影響を強く受ける。よって、落下させた制御棒に最も近い検出器の測定結果は、制御棒価値の計算に使用しないこととした。「重み」は制御棒価値の計算に使用する検出器を 1、制御棒価値の計算に使用しない検出器を 0 としたパラメータである。

Table. 3-2 制御棒価値測定時の初期制御棒・安全棒位置

制御棒・安全棒	C1 測定時	C2 測定時	C3 測定時
C1 (mm)	1201.16	1201.17	1201.16
C2 (mm)	715.93	1201.14	715.90
C3 (mm)	1201.32	733.50	1201.38
S4 (mm)	1200	1200	1200
S5 (mm)	1200	1200	1200
S6 (mm)	1200	1200	1200

Table. 3-3 制御棒 C1 の測定結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	20511	14017	29629
2	20835	13973	29688
3	20740	14013	29917
4	20930	14081	30100
5	20940	14023	29841
平均値	20861	14021	14184.2
積分値 (T = 399.9 s)	20577	15151	29835
重み	0	1	1

(2019 年 10 月 29 日測定)

Table. 3-4 制御棒 C2 の測定結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	14637	9883	20700
2	14649	10044	20827
3	14882	9996	21043
4	14499	10184	20651
5	15038	10155	20995
平均値	14741	10052	20843
積分値 (T = 549.8 s)	47098	27850	66858
重み	1	0	1

(2019年10月29日測定)

Table. 3-5 制御棒 C3 の測定結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	16742	11119	23973
2	16750	11360	24056
3	16483	11347	23732
4	16676	11445	23994
5	16914	11392	24330
平均値	16713	11333	24017
積分値 (T = 499.9 s)	54692	35520	65565
重み	1	1	0

(2019年10月29日測定)

次に、制御棒価値を計算する際に用いた遅発中性子パラメータと、(3-41)式から計算した各制御棒のドル単位の制御棒価値をそれぞれ Table. 3-6 と Table. 3-7 に示す。Table. 3-7 における制御棒価値の不確かさは、遅発中性子パラメータについては正規分布による摂動、中性子計数測定結果についてはポアソン分布による摂動を加えてランダムサンプリング法により評価した。 a_i を摂動させた際は、摂動後の a_i の総和が1となるように規格化した。このランダムサンプリング法におけるサンプルサイズ N は、第2章2.5節で説明したように、ランダムサンプリング法による不確かさの相対統計誤差が1%未満となるように $N = 10,000$ とした[16]。なお、3本の安全棒の制御棒価値は、左右対称位置に存在する制御棒の制御棒価値に等しいと仮定した。

Table. 3-6 Keepin による遅発中性子パラメータ[15]

群 i	崩壊定数 λ_i (1/s)	相対収率 a_i
1	0.0124 ± 0.0003	0.033 ± 0.003
2	0.0305 ± 0.0010	0.219 ± 0.009
3	0.111 ± 0.004	0.196 ± 0.022
4	0.301 ± 0.011	0.395 ± 0.011
5	1.14 ± 0.15	0.115 ± 0.009
6	3.01 ± 0.29	0.042 ± 0.008

Table. 3-7 落下法による制御棒価値測定結果

制御棒・安全棒	制御棒価値 (\$)
制御棒 C1、安全棒 S4	1.203 ± 0.041
制御棒 C2、安全棒 S6	0.408 ± 0.014
制御棒 C3、安全棒 S5	0.408 ± 0.014

3.4.3.2 ペリオド法による余剰反応度測定

ペリオド法とは、臨界状態の原子炉にステップ状に反応度 ρ を添加し、原子炉の出力が e 倍または $1/e$ 倍になる周期であるペリオド T を測定することにより、添加された反応度を算出する方法である。

(3-36)式と(3-37)式で示した一点炉動特性方程式の一般解は、以下のように指数関数の足し合わせで記述できることが分かっている[5]。

$$n(t) = \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \quad (3-42)$$

$$C_i(t) = \sum_{j=1}^7 C_{ij} \exp(\omega_j t) \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (3-43)$$

(3-42)式の A_j は定数である。(3-42)式と(3-43)式において、時定数 ω_j は $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4 > \omega_5 > \omega_6 > \omega_7$ とする。(3-42)式と(3-43)式を(3-36)式に代入すると、 ω_j が満たすべき方程式は以下のようなになる。

$$\rho = \omega_j \Lambda + \omega_j \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\omega_j + \lambda_i} \quad (3-44)$$

ここで、実効増倍率 k_{eff} と即発中性子寿命 ℓ というパラメータを導入すると、反応度は $\rho \equiv (k_{\text{eff}} - 1)/k_{\text{eff}}$ と定義され、中性子生成時間は $\Lambda \equiv \ell/k_{\text{eff}}$ と定義される。これらの関係を用いて、(3-44)式を変形すると以下のように書き表せる。

$$\rho = \frac{\omega_j \ell}{1 + \omega_j \ell} + \frac{1}{1 + \omega_j \ell} \sum_{i=1}^6 \frac{\omega_j \beta_i}{\omega_j + \lambda_i} \quad (3-45)$$

(3-45)式は逆時間方程式と呼ばれる。(3-45)式における ρ と ω_j の関係を Fig. 3-14 に示す。Fig. 3-14 において負の反応度が添加された場合、 ω_j は全て負となるため、(3-42)式における $\exp(\omega_j t)$ の項は全て時間と共に減衰する。この場合、最も減衰が遅い $\exp(\omega_1 t)$ の項が、時間経過につれて支配的となっていく。一方、Fig. 3-14 において正の反応度が添加された場合、 ω_1 のみが正の値となり、(3-42)式において $\exp(\omega_1 t)$ の項のみが時間と共に増大する。従って、添加された反応度の正負に関わらず $\exp(\omega_1 t)$ の項が支配的となるため、(3-42)式は以下のよう近似できる。

$$n(t) \approx A_1 \exp(\omega_1 t) \quad (3-46)$$

ここでペリオド T を以下のように定義する。

$$T = \frac{1}{\omega_1} \quad (3-47)$$

(3-47)式で定義したペリオド T を用いて(3-45)式を表すと以下のようにになる。

$$\rho = \frac{\ell}{T + \ell} + \frac{T}{T + \ell} \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T} \quad (3-48)$$

実際の実験において、添加する反応度の大きさは安全上の配慮及び測定のしやすさから、ペリオドが $T = 10 \sim 100$ (s)程度になるようにする[5]。このペリオドの値に比べて即発中性子寿命 ℓ は非常に小さいので、(3-48)式は以下のように簡易的に記述できる。

$$\rho \approx \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T} \quad (3-49)$$

また、相対収率 $a_i \equiv \beta_i / \beta_{\text{eff}}$ を用いると、(3-49)式はドル単位の反応度を表す式に変形できる。

$$\frac{\rho}{\beta_{\text{eff}}} \approx \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{1 + \lambda_i T} \quad (3-50)$$

以上より、臨界状態の原子炉に反応度を添加してペリオドを測定することにより、(3-49)式あるいは(3-50)式を用いて、添加された反応度の大きさを計算することができる。

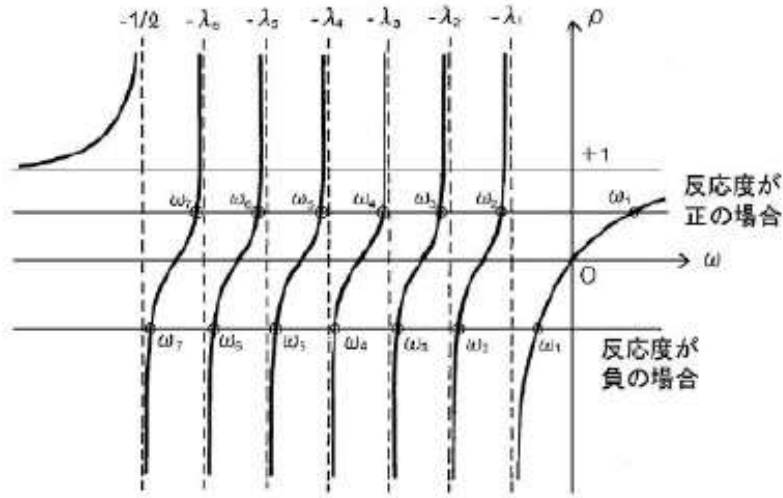


Fig. 3-14 逆時間方程式における反応度 ρ と時定数 ω の関係[5]

ここからは、実施したペリオド法の実験条件について述べる。ペリオド法ではまず実験体系を臨界状態にする必要がある。この臨界状態時の制御棒と安全棒の位置を Table. 3-8 に示す。制御棒は C3 のみが炉心に挿入されており、C3 を全引き抜きすることにより正の反応度を添加した。この時に添加された正の反応度が余剰反応度に対応する。

Table. 3-8 臨界状態時の制御棒・安全棒位置

制御棒・安全棒	位置 (mm)
C1	1201.13
C2	1201.15
C3	613.34
S4	1200
S5	1200
S6	1200

C3 引き抜き後、出力が e 倍になる時間を直接測定することは難しいので、実験では出力が 2 倍になる倍加時間 T_d を測定し、以下式によってペリオド T を算出した。

$$T = \frac{T_d}{\ln 2} \quad (3-51)$$

実験では、出力が①25%→50%、②30%→60%、③35%→70%、④40%→80%となるまでの倍加時間を測定した。この時の測定結果を Table. 3-9 に示す。また、Table. 3-9 に示した倍加時間からペリオドと余剰反応度を推定した結果を Table. 3-10 に示す。Table. 3-10 のペリオドとその不確かさは、①～④の条件で測定した 4 つの倍加時間の平均値と標準誤差から算出した。

余剰反応度は推定したペリオドから(3-50)式により計算した。余剰反応度の計算に使用した遅発中性子パラメータ(α_i, λ_i)は Table. 3-6 に示している。余剰反応度の不確かさは、ペリオドと遅発中性子パラメータ(α_i, λ_i)に対して正規分布による摂動をそれぞれ加えて、ランダムサンプリング法により評価した。 α_i を摂動させた際は、摂動後の α_i の総和が1となるように規格化している。このランダムサンプリング法におけるサンプルサイズ N は、制御棒落下法と同様に $N = 10,000$ とした。

Table. 3-9 倍加時間の測定結果

出力変化	倍加時間 (s)
25%→50%	229.44
30%→60%	223.75
35%→70%	230.06
40%→80%	228.25
平均値	227.35

Table. 3-10 ペリオドと余剰反応度の推定結果

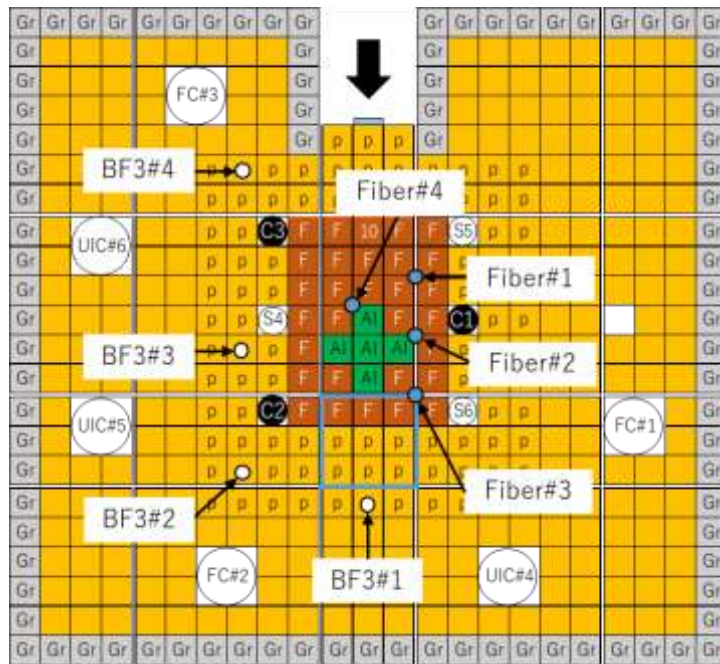
ペリオド (s)	328.00 ± 2.34
余剰反応度 (β)	0.036 ± 0.001

3.4.4 パルス中性子法の測定と解析

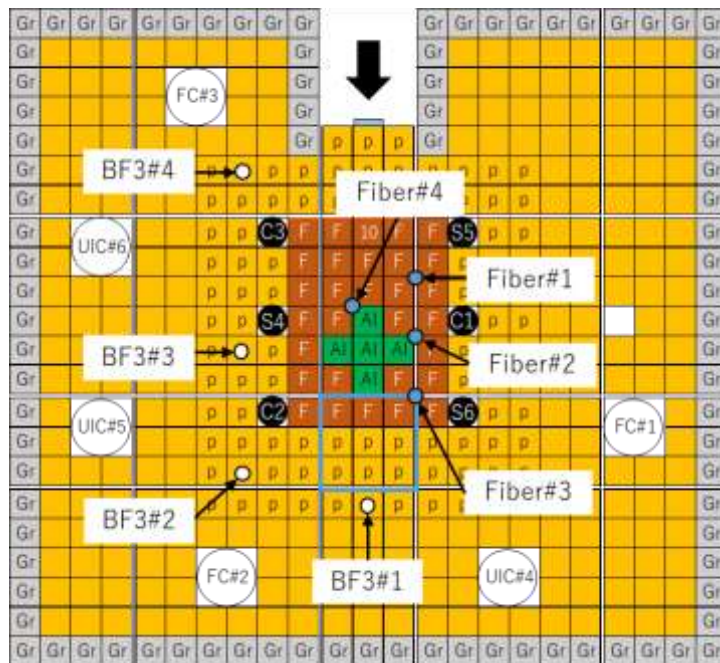
本項では、KUCA で行ったパルス中性子法実験とその解析結果について述べる。3.4.4.1 目にて KUCA で実施したパルス中性子法実験の実験条件と実験結果を示し、3.4.4.2 目でパルス中性子法の実験結果に対して従来フィッティング法と Dynamic Mode Decomposition (DMD)を適用した結果について説明する。

3.4.4.1 実験条件・実験結果

KUCA で実施したパルス中性子法実験の炉心体系を Fig. 3-15 に示し、Fig. 3-15 の各炉心体系における実験条件を Table. 3-11 に示す。Fig. 3-15 では2つの体系を示しており、制御棒 C1・C2・C3 のみを全挿入した体系を C1C2C3in、全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系を ARI (All Rods In)と呼称する。パルス中性子法実験の測定には、減速材領域に設置した4つの BF₃ 検出器(BF₃#1~#4)、燃料領域に設置した4つの Fiber 検出器(Fiber#1~#4)、反射体領域に備え付けられている2つの核分裂電離箱(FC#1,#2)を使用した。Table. 3-11 で示した各炉心体系の未臨界度($-\rho$)は、Table. 3-7 と Table. 3-10 で示した制御棒価値と余剰反応度から算出した。



(a) C1C2C3in



(b) ARI

Fig. 3-15 炉心体系（黒丸・白字の制御棒・安全棒は全挿入）

Table. 3-11 各炉心体系における実験条件

	(a) C1C2C3in		(b) ARI	
制御棒	C1	0 mm	C1	0 mm
	C2	0 mm	C2	0 mm
	C3	0 mm	C3	0 mm
安全棒	S4	1200 mm	S4	0 mm
	S5	1200 mm	S5	0 mm
	S6	1200 mm	S6	0 mm
中心架台	上限		上限	
Am-Be 中性子源	引き抜き		引き抜き	
未臨界度 ($-\rho$)	1.983 ± 0.066 \$		4.001 ± 0.133 \$	

ここで、Fig. 3-15 に示した実験炉心体系の一点炉動特性パラメータの計算結果について記載する。一点炉動特性パラメータの計算には、連続エネルギーモンテカルロ計算コード MCNP6.2[17]を用いた。Iterated Fission Probability (IFP)と呼ばれる随伴中性子束に比例する量を評価することで、モンテカルロ計算により一点炉動特性パラメータの計算を行うことができる[18],[19]。MCNP6.2 の計算条件を Table. 3-12 に示す。IFP の計算では、随伴中性子束による重みを計算するために、外部反復におけるサイクル(世代)を連続した block に分割する。各 block では、①随伴重みを計算するための中性子を発生させる第一世代から始まり、②block 最後の世代において随伴重み関数が収束したと見なし、③こうして推定した随伴重みを利用して、随伴中性子束重みの統計量を推定する。このように分割した各 block のサイクル数が Table. 3-12 で記載した blocksize に対応する[20]。blocksize の値を大きくするほど、より正確な随伴重み関数を推定できるが、得られた随伴中性子束重み統計量の統計的不確かさが大きくなる。KUCA のように炉心が小型で中性子漏洩量が大きい場合には、 k_{eff} 固有値ドミナンス比が 1 より小さくなり、比較的少ない世代で随伴重み関数が収束すると期待できるため、本研究では blocksize=5 と設定した。

Table. 3-12 MCNP6.2 の計算条件

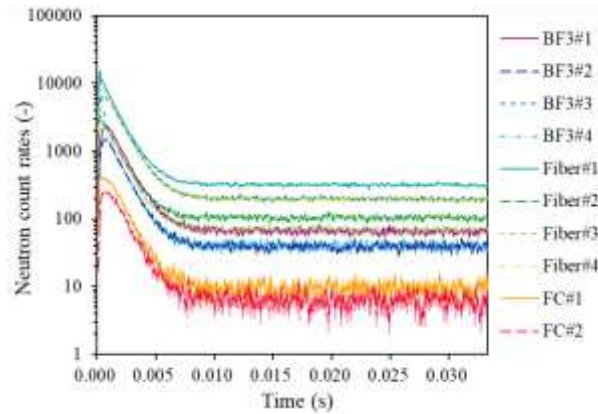
核データ	ENDF/VII.1 [21]
ヒストリー数	100000
バッチ数	1300
捨てバッチ数	300
blocksize	5

MCNP6.2 によって計算した実効遅発中性子割合 β_{eff} と中性子生成時間 Λ を Table. 3-13 に示す。Table. 3-13 における β_{eff} と Λ の不確かさは、MCNP6.2 のモンテカルロ計算における統計誤差である。Table. 3-13 には、制御棒価値・余剰反応度の測定結果から算出した未臨界度(ρ)と、MCNP6.2 による β_{eff} と Λ を用いて計算した $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の値も示している。 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の不確かさについては、各パラメータに対して正規分布による摂動を加え、ランダムサンプリング法によって評価した。このランダムサンプリング法におけるサンプリング数は10,000である。3.4.4.2 目の解析では、Table. 3-13 に示された $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の値を即発中性子減衰定数 α の参考値として用いている。

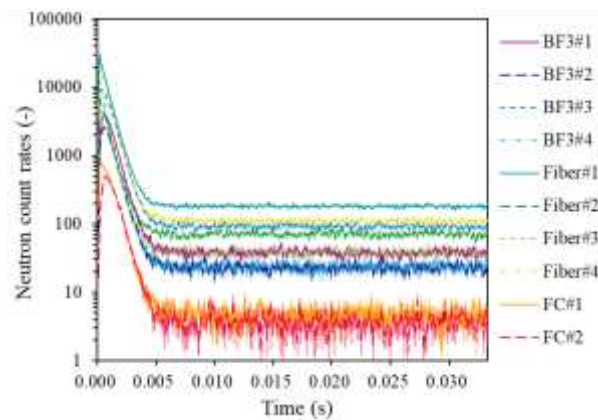
Table. 3-13 MCNP6.2 による一点炉動特性パラメータと $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$

	(a) C1C2C3in	(b) ARI
実効遅発中性子割合 β_{eff} (-)	0.00805±0.00006	0.00797 ± 0.00006
中性子生成時間 Λ (μs)	30.61±0.04	27.20 ± 0.04
$(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ (1/s)	784 ± 18	1466 ± 39

今回実施したパルス中性子法実験では、各炉心体系における未臨界定常状態で1,000秒間中性子を測定した。パルス中性子は30Hzの周期で打ち込まれていたため、合計30,000(=30Hz×1,000s)回のパルス中性子打ち込み結果の平均をパルス中性子法実験結果とした。パルス中性子法実験結果の統計誤差は、30,000個のパルス中性子法実験結果の標準誤差を中心極限定理により計算することで評価した。Fig. 3-16に10個の検出器におけるパルス中性子法実験結果を示す。Fig. 3-16において、パルス中性子打ち込み後の中性子計数率は、 $\Delta t = 0.0001$ sの時間ステップ幅で測定されている。Fig. 3-16におけるC1C2C3inとARIのいずれの実験結果も、中性子計数率の立ち上がり後に即発中性子が指数関数的に減衰しており、最終的には遅発中性子による定常成分が表れている。指数関数的減衰の傾きに注目すると、未臨界度が深いARIの方が、C1C2C3inに比べて即発中性子の減衰が速い。



(a) C1C2C3in



(b) ARI

Fig. 3-16 パルス中性子法実験結果

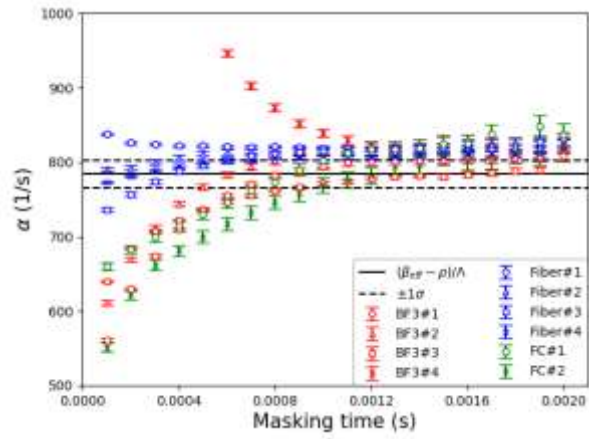
3.4.4.2 DMD と従来フィッティング法による解析

Fig. 3-16 (a)で示した C1C2C3in におけるパルス中性子法実験結果に対して、3.3 節に示した方法で従来フィッティング法と DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を推定した結果を Fig. 3-17 に示す。同様に、Fig. 3-16 (b)で示した ARI におけるパルス中性子法実験結果に対して従来フィッティング法と DMD を適用した結果を Fig. 3-18 に示す。Fig. 3-17 と Fig. 3-18 の横軸は、パルス中性子法実験結果の高次モード成分を削除するために設定したマスキング時間である。従って、Fig. 3-17 と Fig. 3-18 はマスキング時間に対する α 推定結果の変動を示した結果となっている。比較のため、Table. 3-13 にて示した $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の値とその不確かさ 1σ 範囲も Fig. 3-17 と Fig. 3-18 に示している。

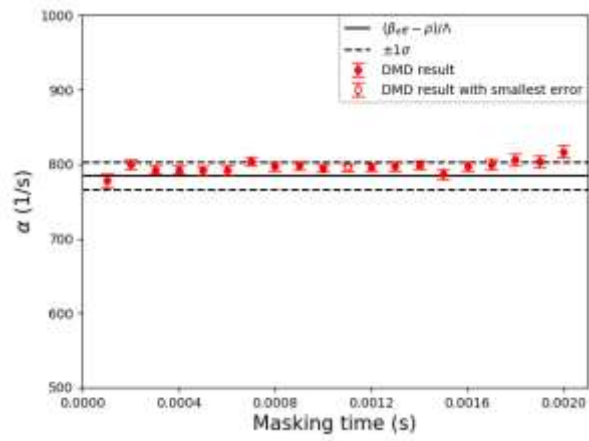
パルス中性子法実験結果における初期の時間ステップでは、高次モード成分が十分に減衰していない。従って、従来フィッティング法で基本モード成分の α を推定する場合、即発中性子の減衰初期段階における高次モード成分の影響が大きくなる。例えば、Fig. 3-17 (a)と Fig. 3-18 (a)の従来フィッティング法による α 推定結果において、特に BF₃ 検出器と核分裂電離箱(FC#1,#2) の α 推定結果は、マスキング時間が小さくなるにつれて参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ か

ら外れていく結果となっている。この従来フィッティング法による α 推定結果と参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の差異は α のフィッティング誤差より大きい。すなわち、従来フィッティング法による α 推定結果には高次モード成分による系統誤差(バイアス)が生じている。よって、従来フィッティング法により基本モード成分の α を得るためには、マスクング時間を適切に決定する必要がある。適切なマスクング時間を決定するに当たって、 α のフィッティング誤差が最小となるマスクング時間を選択する方法が考えられる。しかし、Fig. 3-17 (a)と Fig. 3-18 (a)ではマスクング時間に対して α 推定結果が変動しているため、フィッティング誤差が最小となるマスクング時間を選ぶと、参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ から外れた値が推定されてしまう可能性がある。従って、今回のように $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ といった参考値が事前に与えられていない場合、適切なマスクング時間の決定は困難となる。また、従来フィッティング法では、Fig. 3-17 (a)と Fig. 3-18 (a)で示されたように検出器毎に推定される α の値が大きく異なっている。 α の値を一意に決定するためには、複数の検出器結果から1つだけ選ぶ必要があるが、参考値が事前に与えられていない場合、どの検出器結果を採用するのか決定し難い。以上のことより、従来フィッティング法では基本モード成分の α を一意に得ることが難しく、解析者側の工学的判断に依存する所が大きい。

一方 DMD では、時系列データを複数の指数関数のモードに分解することで、高次モード成分の影響を基本モード成分から排除することができる。そのため、高次モード成分が残存する即発中性子減衰初期段階における時間ステップデータを用いた場合でも、基本モード成分の α を抽出することが可能となると考えられる。Fig. 3-16 (a),(b)の時系列データに DMD を適用した結果、Fig. 3-17 (b)と Fig. 3-18 (b)において、マスクング時間に対する α 推定結果の変動は従来フィッティング法と比べて大幅に低減されている。DMD による α 推定結果は概ね一定となり、いずれのマスクング時間においても参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ と統計誤差の範囲で一致している。よって、DMD では $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ といった参考値が不明な場合でも、頑健に基本モード成分の α を推定することができる。DMD による α 推定結果がマスクング時間に対して概ね一定になっていることから、マスクング時間は DMD による α の統計誤差が最小となる時間を選べば良い。Fig. 3-17 (b)と Fig. 3-18 (b)において α の統計誤差が最小となるマスクング時間と、そのマスクング時間における α 推定結果を Table. 3-14 に纏めた。このように、DMD では複数の検出器結果から1つの α の値を推定することができるため、従来フィッティング法のようにどの検出器結果を採用するか決定する必要がない。以上より、DMD は従来フィッティング法の課題を克服可能であることを、実際のパルス中性子法実験を通じて実証することができた。

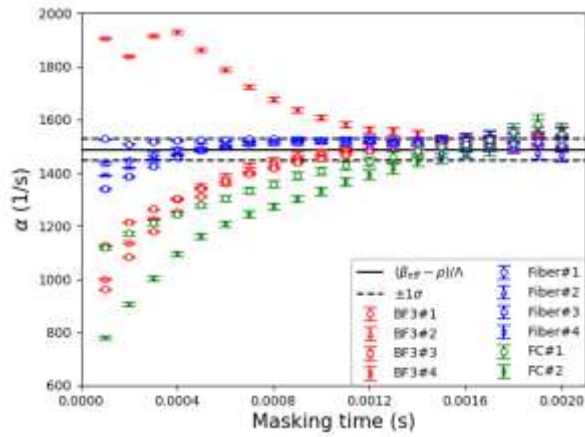


(a) 従来フィッティング法

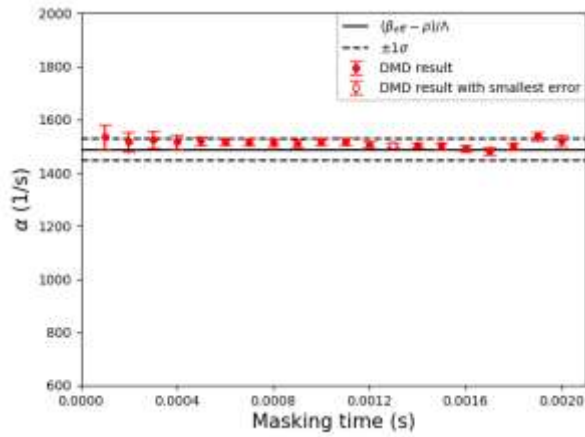


(b) DMD

Fig. 3-17 C1C2C3in における α 推定結果



(a) 従来フィッティング法



(b) DMD

Fig. 3-18 ARI における α 推定結果

Table. 3-14 DMD による α 推定結果

	C1C2C3in	ARI
マスクング時間 (s)	0.0011	0.0013
α 推定結果 (1/s)	795 ± 5	1505 ± 10

3.5 本章のまとめ

本章では、主にパルス中性子法の理論式の導出と、KUCA で実施したパルス中性子法実験とその解析結果について説明した。

3.1 節では、本章の概要を説明した。

3.2 節では、パルス中性子法において測定される中性子計数率 $C(t)$ の理論式を導出した。理論式の導出に当たって、まずグリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を時間依存輸送方程式から導出した。グリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ は、時刻 t_0 において位置 \vec{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\vec{\Omega}_0$ の中性子が 1 個投入された場合に、その後の時刻 t における位置 \vec{r} 、エネルギー E 、方向 $\vec{\Omega}$ の中性子束を表す。導出されたグリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を用いて、パルス中性子法の理論式が $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n t} + C_{BG}$ というように指数関数の足し合わせと定常項で表せることを示した。

3.3 節では、従来フィッティング法による α の推定方法と、本研究で新たに適用を試みた DMD による α の推定方法について説明した。従来フィッティング法では、パルス中性子法の中性子計数率 $C(t)$ に対してマスクング時間を設定した上で、フィッティング式 $C(t) = C_0 \exp(-\alpha t) + C_{BG}$ で基本モード成分の α を推定する。一方 DMD では、複数の検出器で測定した $C(t)$ について、各検出器を行成分、各時間ステップを列成分とした行列 \mathbf{X} を作成する。パルス中性子の理論式における定常項 C_{BG} を差し引くため、全時間ステップに亘って 1 となる定常信号を行列 \mathbf{X} に追加した。定常信号を追加した行列 \mathbf{X} から Exact DMD により時間発展行列 \mathbf{A} を求める。時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解することで各モード成分の固有値 λ_i が得られ、 $\alpha_i = -\ln(\lambda_i)/\Delta t$ という関係式によって各モード成分の即発中性子減衰定数を得る。ここで、 Δt は中性子計数率 $C(t)$ における時間ステップ幅である。今回の DMD では行列 \mathbf{X} に定常信号を追加しているため、時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値 λ_{\max} は常に 1 となる。従って、最大固有値 $\lambda_{\max} = 1$ を除いて 2 番目に最大となる固有値に対応する α_i を基本モード成分の α とした。

3.4 節では、KUCA で実施したパルス中性子法実験とその解析結果について纏めた。今回の実験では、KUCA の A 架台にて「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」という名称の炉心を構築した。装荷した燃料集合体は、濃縮ウランのみを含む「1/8”p60EUEU 燃料集合体」と「1/8”p10EUEU 燃料集合体」、そして濃縮ウランと天然ウランを含む「EU-AI-NU-AI-EU 燃料集合体」の 3 種類を用いた。パルス中性子法実験の測定には、減速材領域に設置した BF₃ 検出器 4 個、燃料領域に設置した光ファイバー検出器 4 個、反射体領域に備え付けられている核分裂電離箱(FC)2 個を使用した。実験体系における制御棒価値は制御棒落下法により測定し、余剰反応度はペリオド法により測定した。今回のパルス中性子法実験では、制御棒 C1・C2・C3 のみを全挿入した体系(C1C2C3in)と、全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系(ARI)で測定を行った。パルス中性子法実験結果に対して従来フィッティング法を適用した結果、推定された α の値はマスクング時間に対して大きく変動し、高次モード成分による系統誤差が生じていた。また、従来フィッティング法では検出器毎に α 推定結果が大きく異なる

っており、 α の参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ が事前に与えられなければ従来フィッティング法により α の値を一意に決定することが困難であった。一方 DMD を適用した結果、マスクング時間に対する α 推定結果の変動は大幅に低減された。いずれのマスクング時間においても、DMD による α 推定結果は参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ と統計誤差の範囲で概ね一致しており、頑健に基本モード成分の α を推定することができた。DMD による α の値は統計誤差が最小となる推定結果を選べば良く、C1C2C3in では 795 ± 5 (1/s)、ARI では 1505 ± 10 (1/s)となった。以上の解析より、DMD により従来フィッティング法の課題を克服可能であることを、実際のパルス中性子法実験を通して実証することができた。

参考文献

- [1] B. E. Simmons and J. S. King, “A pulsed neutron technique for reactivity determination,” *Nucl. Sci. Eng.*, **3**, 5, pp. 595-608 (1958).
- [2] T. Endo, Y. Yamane, and A. Yamamoto, “Space and energy dependent theoretical formula for the third order neutron correlation technique,” *Ann. Nucl. Energy*, **33**, pp. 521-537 (2006).
- [3] “scipy.optimize.curve_fit,” SciPy.org., https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html (2021/11/26 アクセス).
- [4] F. Nishioka, et al., “Applicability of dynamic mode decomposition to estimate fundamental mode component of prompt neutron decay constant from experimental data,” *Nucl. Sci. Eng.*, **196**, 2, pp.133-143 (2021).
- [5] 三澤毅, 宇根崎博信, 卞哲浩, “原子炉物理実験,” 京都大学学術出版会, 日本, ISBN978-4-87698-977-5 (2010).
- [6] C. H. Pyeon, et al., “Accelerator-driven system at Kyoto University Critical Assembly,” Springer, ISBN 978-981-16-0343-3 (2021).
- [7] J. B. Lagrange, et al., “Straight scaling FFAG beam line,” *Nucl Instrum Methods Phys Res A.*, **691**, pp.55-63 (2012).
- [8] E. Yamakawa, et al., “Serpentine acceleration in zero-chromatic FFAG accelerators,” *Nucl Instrum Methods Phys Res A.*, **716**, pp.46-53 (2013).
- [9] 塩澤武司, “固有中性子源を用いた中性子源増倍法と Feynman- α 法による未臨界度測定に関する研究,” 修士論文, 名古屋大学, (2015).
- [10] “中性子検出器,” 放射光科学研究施設, http://accwww2.kek.jp/oho/OHOtxt/OHO-2016/06_Sakasai_Kaoru.pdf (2021/11/22 アクセス).
- [11] “光ファイバーを利用した放射線測定,” 電力技術研究所, https://www.chuden.co.jp/resource/corporate/news_78_N07831.pdf (2021/11/22 アクセス).
- [12] K. Watanabe, et al., “Development of an optical fiber type detector using a Eu:LiCaAlF₆

- scintillator for neutron monitoring in boron neutron capture therapy,” *Nucl Instrum Methods Phys Res A.*, **802**, pp. 1-4 (2015).
- [13] 丸山博見, 岩崎智彦, 山本章夫, 中島健, 岡島成晃, 熊谷明, “シリーズ 現代核科学の基礎 1 原子炉物理,” 社団法人原子力学会, (2008).
- [14] 野中朝日, “時間領域分割積分法によるドル単位未臨界度推定,” 修士論文, 名古屋大学, (2020).
- [15] G.R. Keepin, *Physics of Nuclear Kinetics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA (1965).
- [16] B. Foad, A. Yamamoto, and T. Endo, “Uncertainty and regression analysis of the MSLB accident in PWR based on unscented transformation and low rank approximation,” *Ann. Nucl. Energy.*, **143**, 107493 (2020).
- [17] C. J. Werner, J. Armstrong, S. G. Mashnik, *et al.*, *MCNP[®] USER’S MANUAL Code Version 6.2*, LA UR 17 29981, Los Alamos National Laboratory, (2017).
- [18] Y. Nauchi, T. Kameyama, “Development of calculation technique for Iterated Fission Probability and reactor kinetic parameters using continuous energy monte carlo method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **47**, pp. 977-990, (2010).
- [19] B. C. Kiedrowski, *et al.*, “Adjoint-weighted tallies for k-Eigenvalue calculations with continuous-energy monte carlo,” *Nucl. Sci. Eng.*, **168**, 3, pp.226-241 (2011).
- [20] J. A. Favorite, *et al.*, “Adjoint-based sensitivity and uncertainty analysis for density and composition: A user’s guide,” *Nucl. Sci. Eng.*, **185**, 3, pp.384-405 (2017).
- [21] M. B. Chadwick, *et al.*, “ENDF/B-VII.1 nuclear data for science and technology: cross sections, covariances, fission product yields and decay data,” *Nuclear Data Sheets*, **112**, pp. 2887-2996, (2011).

第4章 面積比法に対する DMD の適用

4.1 本章の概要

本章では、ドル単位の未臨界度を測定するための実験手法の一つである面積比法[1]の理論と、京都大学臨界集合体実験装置(KUCA)で取得したパルス中性子法実験結果からドル単位未臨界度を推定した結果について述べる。

面積比を推定するための従来法として、外挿面積比法[2],[3],[4]と呼ばれる手法が存在するが、高次モード成分の影響により頑健にドル単位未臨界度を推定することが困難となっている。そこで、Dynamic Mode Decomposition (DMD) [5],[6]を面積比法に適用することにより、高次モード成分の影響を低減した形でドル単位未臨界度を推定可能か確認することを本章の目的とする。

4.2 節では、面積比法の理論を説明する。まずドル単位未臨界度の推定に必要な即発中性子成分面積と遅発中性子成分面積の導出を行う。その後、導出した即発中性子成分面積と遅発中性子成分面積の比がドル単位未臨界度に相当することを理論的に示す。

4.3 節では、面積比の推定手法について説明する。面積比の推定手法として、従来法である外挿法と、本論文で新たに適用を試みた DMD による面積比の推定方法を纏める。

4.4 節では、KUCA で取得したパルス中性子法実験結果に面積比法を適用することで、ドル単位未臨界度を推定した結果を示す。最初に KUCA で行ったパルス中性子法実験の実験炉心体系と、その実験炉心体系における制御棒価値・余剰反応度を示す。その後、面積比法を適用したパルス中性子法実験における実験条件・実験結果を示し、パルス中性子法実験に対して DMD と従来外挿法を適用した結果について説明する。

最後に、4.5 節で本章のまとめを述べる。

4.2 面積比法の理論

ある未臨界体系に対してパルス中性子を連続的に打ち込み、未臨界増倍によって体系内の遅発中性子先行核数が準定常状態に達している場合を考える。この時、Fig. 4-1 のようなパルス中性子法の測定結果が得られたとする。Fig. 4-1 の横軸はパルス中性子打ち込み後の経過時間、縦軸は測定された中性子計数率である。面積比法における「面積」とは、Fig. 4-1 のように測定された中性子計数率を時間積分した値を指す。面積比法では、Fig. 4-1 に示した①体系内における即発中性子の総数に比例した量である即発中性子成分面積 A_p と、②体系内の遅発中性子の総数に比例した量である遅発中性子成分面積 A_d を求め、面積比 A_p/A_d を計算することでドル単位の未臨界度 $(-\rho/\beta_{\text{eff}})$ を推定する。ここで、未臨界体系の実効増倍率を $k_{\text{eff}} (< 1)$ 、パルス中性子源強度を S とする。体系内の中性子数の総和 $A_p + A_d$ は、初項 $S \cdot$ 公比 k_{eff} の等比数列の和となるため、以下のように表せる。

$$A_p + A_d = \frac{S}{1 - k_{\text{eff}}} \quad (4-1)$$

また、実効遅発中性子割合を β_{eff} とすると、即発中性子成分面積 A_p についても初項 $S \cdot$ 公比 $(1 - \beta_{\text{eff}})k_{\text{eff}}$ の等比数列の和となるため、 A_p は以下のように表せる。

$$A_p = \frac{S}{1 - (1 - \beta_{\text{eff}})k_{\text{eff}}} \quad (4-2)$$

(4-1)式の両辺から(4-2)式の両辺を引くことにより、遅発中性子成分面積 A_d は以下のようになる。

$$A_d = \frac{S\beta_{\text{eff}}k_{\text{eff}}}{(1 - k_{\text{eff}})\{1 - (1 - \beta_{\text{eff}})k_{\text{eff}}\}} \quad (4-3)$$

(4-2)式の両辺を(4-3)式の両辺で割ることにより、 A_p と A_d の比は以下のように表せる。

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{1 - k_{\text{eff}}}{\beta_{\text{eff}}k_{\text{eff}}} \quad (4-4)$$

ここで、未臨界度($-\rho$)は(4-5)式のように定義されるため、(4-4)式で導出した面積比 A_p/A_d は(4-6)式のようにドル単位の未臨界度に相当することが理解できる。

$$-\rho \equiv \frac{1 - k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}} \quad (4-5)$$

$$\frac{A_p}{A_d} = -\frac{\rho}{\beta_{\text{eff}}} \quad (4-6)$$

ここまでの説明は、体系内に基本モード成分しか存在しないと近似した場合における面積比の導出となっている。実際のパルス中性子法実験では高次モード成分も存在し、面積比法でドル単位未臨界度を推定するためには、パルス中性子法測定結果における基本モード成分のみを抽出できる手法が必要となる。高次モード成分の影響を軽減した上で、基本モード成分の面積比を推定する手法として外挿面積比法が提案されている[2],[3],[4]。第1章1.1.1項で述べたように外挿面積比法では、マスキング時間を設定して高次モード成分が残存している時間領域を削除した上で、測定結果に対して $C(t) = C_0 \exp(-at) + C_{\text{BG}}$ でフィッティングを行い、高次モード成分が残存する時間領域を基本モード成分で外挿する。但し、外挿面積比法においても高次モード成分の影響を完全に除去することはできず、設定するマスキング時間の値や検出器位置によって面積比推定結果が変化するという課題がある。従って、高次モード成分の影響をより低減した形で面積比を推定できる手法の開発が望まれている。4.2節における以降の項目ではこの課題の解決に向けて、まずは α 固有関数展開や k_{eff} 固有関数展開を用いて即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d を導出することを試み、面積比の理論式を導出することで高次モード成分の影響がどのように現れるか説明する。4.2.1項では即発中性子成分面積 A_p の導出、4.2.2項では遅発中性子成分面積 A_d の導出、4.2.3項では4.2.1項と4.2.2項で導出された A_p と A_d から面積比 A_p/A_d の理論式を導出した結果について示す。

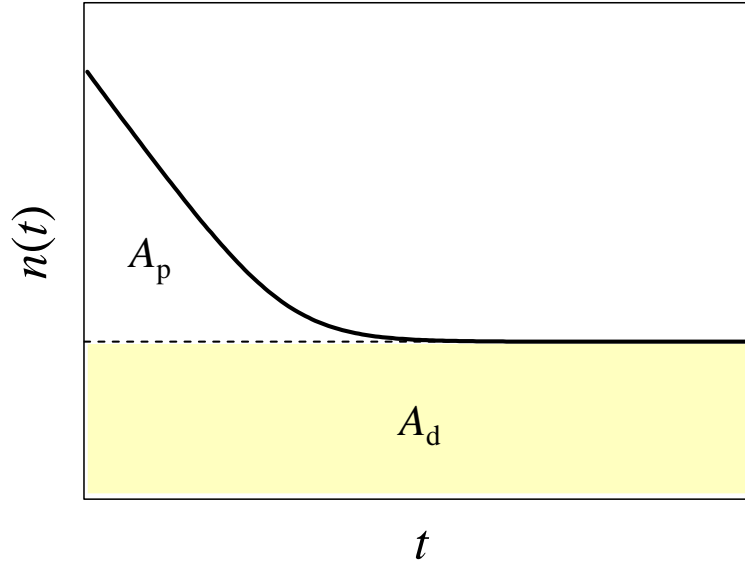


Fig. 4-1 面積比法概念図[7]

4.2.1 即発中性子成分面積

本項では、即発中性子成分面積 A_p の理論式を、 α 固有関数展開を用いて導出する。

ある未臨界体系において、デルタ関数状のパルス中性子 $S(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$ が $t = 0$ で1ショット打ち込まれた場合を考える。ここで、 $S(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$ はパルス中性子源の空間分布・エネルギースペクトル・飛行方向分布を表す。中性子束 $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ における即発中性子成分 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ に着目した場合、 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ は以下で示す時間輸送中性子輸送方程式を満たす。

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = (-\mathbf{A} + \mathbf{F}_p) \psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + S(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) \delta(t) \quad (4-7)$$

ここで、 $v(E)$ は中性子速度、 \mathbf{A} は中性子の消滅演算子、 \mathbf{F}_p は核分裂による即発中性子の生成演算子であり、それぞれ以下のように表せる。

$$\mathbf{A} \equiv \vec{\Omega} \nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \quad (4-8)$$

$$\mathbf{F}_p \equiv \frac{\chi_p(\vec{r}, E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu_p \Sigma_f(\vec{r}, E') \quad (4-9)$$

(4-8)式と(4-9)式における $\Sigma_t(\vec{r}, E)$ は巨視的全断面積、 $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ は巨視的散乱断面積、 $\Sigma_f(\vec{r}, E')$ は巨視的核分裂断面積、 $\chi_p(\vec{r}, E)$ は核分裂スペクトル、 ν_p は1回の核分裂反応で発生する即発中性子数の期待値である。

ここで、 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ が相対的な空間分布やエネルギースペクトルの形状を保ちつつ、指数関数的に減少していくと仮定した上で、以下の α 固有値方程式を考える[8]。

$$(\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{\alpha_n}{v(E)} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-10)$$

$$(\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{F}_p^\dagger)\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{\alpha_n}{v(E)}\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-11)$$

(4-10)式と(4-11)式における α_n は n 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は α_n に対応する n 次モード成分の固有関数、 $\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の随伴固有関数である。また、 \mathbf{A}^\dagger は \mathbf{A} の随伴演算子、 \mathbf{F}_p^\dagger は \mathbf{F}_p の随伴演算子であり、それぞれ以下のように表せる。

$$\mathbf{A}^\dagger \equiv -\vec{\Omega}\nabla + \Sigma_t(\vec{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \quad (4-12)$$

$$\mathbf{F}_p^\dagger \equiv \nu_p \Sigma_f(\vec{r}, E) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_p(\vec{r}, E')}{4\pi} \quad (4-13)$$

固有関数 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ と $\psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の直交条件を考える。(4-10)式の両辺に $\psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間(位置 \vec{r} 、エネルギー E 、方向 $\vec{\Omega}$ で張られる位相空間)で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \psi_m^\dagger (\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_n \rangle = \alpha_n \langle \psi_m^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle \quad (4-14)$$

(4-14)式の $\langle \rangle$ は全位相空間における積分を表している。同様に、(4-11)式の両辺に $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \psi_n (\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{F}_p^\dagger) \psi_m^\dagger \rangle = \alpha_m \langle \psi_n \frac{1}{v} \psi_m^\dagger \rangle \quad (4-15)$$

随伴演算子の性質より、 $\langle \psi_m^\dagger (\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_n \rangle = \langle \psi_n (\mathbf{A}^\dagger - \mathbf{F}_p^\dagger) \psi_m^\dagger \rangle$ であるので、(4-14)式と(4-15)式から以下の関係が導ける。

$$(\alpha_n - \alpha_m) \langle \psi_n \frac{1}{v} \psi_m^\dagger \rangle = 0 \quad (4-16)$$

(4-16)式より、 $m \neq n$ の異なる次数において $\alpha_n \neq \alpha_m$ の場合、 $\langle \psi_n \frac{1}{v} \psi_m^\dagger \rangle = 0$ でなければならない。一方、 $m = n$ の場合は $\alpha_n = \alpha_m$ なので(4-16)式は満たされる。よって、固有関数 ψ_n と ψ_n^\dagger の直交条件はクロネッカーのデルタ δ_{mn} を用いて以下のように表せる。

$$\langle \psi_m^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle = \langle \psi_m^\dagger \frac{1}{v} \psi_m \rangle \delta_{mn} \quad (4-17)$$

また、(4-17)式より以下で示す直交条件も成り立つ。

$$\langle \psi_m^\dagger (\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_n \rangle = \langle \psi_m^\dagger (\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_m \rangle \delta_{mn} \quad (4-18)$$

(4-10)式の両辺に $\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を乗じて全位相空間で積分すると、 n 次モード成分の即発中性子減衰定数は以下のように表せる。

$$\alpha_n = \frac{\langle \psi_n^\dagger (\mathbf{A} - \mathbf{F}_p) \psi_n \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \quad (4-19)$$

ここで、即発中性子成分 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ が α 固有関数 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を用いて以下式で展開できるとする。

$$\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-20)$$

(4-20)式の $c_n(t)$ は n 次モード成分の展開係数を表す。(4-20)式を(4-7)式に代入すると以下式が得られる。

$$\frac{1}{v(E)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = (-\mathbf{A} + \mathbf{F}_p) \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + S(r, E, \vec{\Omega}) \delta(t) \quad (4-21)$$

(4-21)式の両辺に $\psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を乗じて全位相空間で積分すると、(4-17)式、(4-18)式、(4-19)式の関係より、以下の微分方程式を得ることができる。

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = -\alpha_n c_n(t) + \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \delta(t) \quad (4-22)$$

(4-22)式をラプラス変換すると、以下のようなになる。

$$s\tilde{c}_n(s) - c_n(0) = -\alpha_n \tilde{c}_n(s) + \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \quad (4-23)$$

ここで、 $t \leq 0$ において $c_n(t) = 0$ であることを利用すると、 $c_n(t)$ のラプラス変換 $\tilde{c}_n(s)$ は次のように表せる。

$$\tilde{c}_n(s) = \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \frac{1}{s + \alpha_n} \quad (4-24)$$

(4-24)式をラプラス逆変換することにより、展開係数 $c_n(t)$ を以下のように求めることができる。

$$c_n(t) = \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} e^{-\alpha_n t} \quad (4-25)$$

(4-25)式を(4-20)式に代入すると、即発中性子成分 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) e^{-\alpha_n t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) e^{-\alpha_n t} \end{aligned} \quad (4-26)$$

ここで、(4-26)式の \mathcal{S}_n は以下のように定義した。

$$\mathcal{S}_n \equiv \frac{\langle \psi_n^\dagger S \rangle}{\langle \psi_n^\dagger \frac{1}{v} \psi_n \rangle} \quad (4-27)$$

面積比法の測定では、体系にはパルス中性子が一定の周期 τ で打ち込まれ続けている。ここ

で、最初のパルス中性子打ち込みから連続的にパルス中性子が打ち込まれ続け、時間 t' が経過した時の中性子束における即発中性子成分を $\psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ とすると、 $\psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ は以下のように表せる。

$$\psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t') = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t' + j\tau) \quad (4-28)$$

即発中性子成分面積 A_p の理論式を得るため、以下のように $\psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ を $0 \leq t' \leq \tau$ で時間積分した量である $\tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を考える。

$$\tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{\tau} \psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t') dt' \quad (4-29)$$

(4-29)式の $\psi'_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ に(4-28)式を代入し、(4-26)式を利用すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t' + j\tau) dt' \\ &= \int_0^{\infty} \psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t') dt' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (4-30)$$

最後に、体系内のある検出器 k における巨視的検出反応断面積を $\Sigma_{d,k}(\vec{r}, E)$ とすると、その検出器で測定された即発中性子成分面積 A_p (すなわち、即発中性子に起因した中性子計数率の時間積分値)は、以下のように α 固有値と α 固有関数で展開された形となる。

$$\begin{aligned} A_p &= \langle \Sigma_{d,k} \tilde{\psi}_p \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \langle \Sigma_{d,k} \psi_n \rangle \end{aligned} \quad (4-31)$$

4.2.2 遅発中性子成分面積

本項では、遅発中性子成分面積 A_d の理論式を、 k_{eff} 固有関数展開を用いて導出する。

即発中性子成分面積 A_p を導出した時と同様に、ある未臨界体系においてデルタ関数状のパルス中性子 $S(r, E, \vec{\Omega})$ が $t = 0$ で1ショット打ち込まれた場合を考える。中性子束 $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ における遅発中性子成分 $\psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ は以下の時間輸送中性子輸送方程式を満たす。

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial \psi_d}{\partial t} = (-\mathbf{A} + \mathbf{F}_p) \psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \sum_{i=1}^6 \frac{\chi_i(\vec{r}, E)}{4\pi} \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (4-32)$$

(4-32)式の \mathbf{A} は(4-8)式で定義される中性子消滅演算子、また、遅発中性子先行核数密度 C_i については、以下で示す時間微分方程式を満たす。 \mathbf{F}_p は(4-9)式で定義された核分裂による即発中性子生成演算子である。また、遅発中性子先行核数密度については、以下で示す時間微分方

程式を満たす。

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu_i \Sigma_f(\vec{r}, E') (\psi_p(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) + \psi_d(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t)) - \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \quad (4-33)$$

(4-33)式の $C_i(\vec{r}, t)$ は*i*群の遅発中性子先行核密度、 λ_i は*i*群の遅発中性子先行核の崩壊定数、 $\chi_i(\vec{r}, E)$ は*i*群の遅発中性子先行核の崩壊による遅発中性子スペクトルである。また、(4-33)式の $\Sigma_f(\vec{r}, E')$ は巨視的核分裂断面積、 ν_i は1回の核分裂反応で発生する*i*群の遅発中性子先行核数の期待値である。

始めに、(4-33)式を遅発中性子先行核の放射能 $\lambda_i C_i(\vec{r}, t)$ について整理し、それを(4-32)式に代入することにより、以下式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial \psi_d}{\partial t} &= (-\mathbf{A} + \mathbf{F}_p) \psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \\ &+ \sum_{i=1}^6 \frac{\chi_i(\vec{r}, E)}{4\pi} \left[\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu_i \Sigma_f(\vec{r}, E') \{ \psi_p(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \right. \\ &\left. + \psi_d(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \} - \frac{\partial C_i}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4-34)$$

ここで、4.2.1項で述べた即発中性子束 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ の場合と同様に、最初のパルス中性子打ち込みから時間 t' が経過した時の中性子束における遅発中性子成分を $\psi'_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ とし、 $\psi'_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t')$ を $0 \leq t' \leq \tau$ で時間積分した量を $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ とする。4.2.1項の(4-30)式と同様に、 $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) &= \int_0^\tau \psi'_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t') dt' \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\tau \psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t' + j\tau) dt' \\ &= \int_0^\infty \psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t') dt' \end{aligned} \quad (4-35)$$

$t = 0, \infty$ において $\psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = 0$ かつ $C_i(\vec{r}, t) = 0$ であるとして、(4-34)式を $0 \leq t \leq \infty$ で時間積分すると以下ようになる。

$$(\mathbf{A} - \mathbf{F}) \tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-36)$$

(4-36)式における演算子 \mathbf{F} と \mathbf{F}_i はそれぞれ以下のように定義した。

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i \quad (4-37)$$

$$\mathbf{F}_i \equiv \frac{\chi_i(\vec{r}, E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \nu_i \Sigma_f(\vec{r}, E', \vec{\Omega}) \quad (4-38)$$

遅発中性子成分面積 A_d と k_{eff} 固有関数[9],[10],[11]の関係を理論的に示すため、 $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ が

k_{eff} 固有関数 $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を用いて以下のように展開できるとする。

$$\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-39)$$

(4-39)式の d_m は、 m 次モード成分に対応する展開係数である。 k_{eff} 固有関数 $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は以下の k_{eff} 固有値方程式を満足する。

$$\mathbf{A}\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_m} \mathbf{F}\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-40)$$

$$\mathbf{A}^\dagger \Psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{k_m} \mathbf{F}^\dagger \Psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-41)$$

ここで、 \mathbf{A}^\dagger は \mathbf{A} の随伴演算子、 \mathbf{F}^\dagger は \mathbf{F} の随伴演算子、 $\Psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の随伴固有関数である。なお、基本モード成分 $n = 0$ の固有値 k_0 は実効増倍率 k_{eff} に対応する。

固有関数 $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ と $\Psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の直交条件を考える。(4-40)式の両辺に $\Psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \Psi_n^\dagger \mathbf{A} \Psi_m \rangle = \frac{1}{k_m} \langle \Psi_n^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle \quad (4-42)$$

同様に、(4-41)式の両辺に $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ をかけて全位相空間で積分すると以下の関係式が得られる。

$$\langle \Psi_m \mathbf{A}^\dagger \Psi_n^\dagger \rangle = \frac{1}{k_n} \langle \Psi_m \mathbf{F}^\dagger \Psi_n^\dagger \rangle \quad (4-43)$$

随伴演算子の性質より、 $\langle \Psi_n^\dagger \mathbf{A} \Psi_m \rangle = \langle \Psi_m \mathbf{A}^\dagger \Psi_n^\dagger \rangle$ であるので、(4-42)式と(4-43)式から以下の関係が導ける。

$$\left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_m} \right) \langle \Psi_n^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle = 0 \quad (4-44)$$

(4-44)式より、 $m \neq n$ の異なる次数において $1/k_m \neq 1/k_n$ の場合、 $\langle \Psi_n^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle = 0$ でなければならない。一方、 $m = n$ の場合は $1/k_m = 1/k_n$ なので(4-44)式は満たされる。よって、固有関数 $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ と $\Psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ の直交条件はクロネッカーのデルタ δ_{mn} を用いて以下のように表せる。

$$\langle \Psi_n^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle = \langle \Psi_n^\dagger \mathbf{F} \Psi_n \rangle \delta_{mn} \quad (4-45)$$

以上の(4-39)式で示した k_{eff} 固有関数で展開された $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を(4-36)式に代入することにより、以下式が得られる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m (\mathbf{A} - \mathbf{F}) \Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-46)$$

(4-46)式の両辺に $\Psi_m^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を乗じて全位相空間で積分すると、(4-40)式と(4-45)式の関係より展開係数 d_m の理論式を以下のように求めることができる。

$$d_m = \frac{k_m}{1 - k_m} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \quad (4-47)$$

従って、 $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ は以下式で表せる。

$$\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{1 - k_m} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4-48)$$

4.2.1 項に示した即発中性子成分面積 A_p と同様に、体系内のある検出器 k における巨視的検出反応断面積を $\Sigma_{d,k}(\vec{r}, E)$ とすると、遅発中性子成分面積 A_d (すなわち、遅発中性子に起因した中性子計数率の時間積分値)は、以下のように k_{eff} 固有値と k_{eff} 固有関数で展開された形で求めることができる。

$$\begin{aligned} A_d &= \langle \Sigma_{d,k} \tilde{\psi}_d \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{1 - k_m} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle \end{aligned} \quad (4-49)$$

4.2.3 面積比法の理論式

本項では、4.2.1 項で α 固有関数展開により導出した即発中性子成分面積 A_p と、4.2.2 項で導出した遅発中性子成分面積 A_d の理論式を利用することで、面積比 A_p/A_d がドル単位未臨界面度 $(-\rho/\beta_{\text{eff}})$ に相当することを示す。

(4-31)式の両辺をと(4-49)式で割ることにより、面積比 A_p/A_d は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{A_p}{A_d} &= \frac{\langle \Sigma_{d,k} \tilde{\psi}_p \rangle}{\langle \Sigma_{d,k} \tilde{\psi}_d \rangle} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \langle \Sigma_{d,k} \psi_n \rangle}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m}{1 - k_m} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \tilde{\psi}_p \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle} \end{aligned} \quad (4-50)$$

(4-50)式に(4-30)式の $\tilde{\psi}_p$ を代入することで、 A_p/A_d は以下のように変形できる。

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \langle \Sigma_{d,k} \psi_n \rangle}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_m}{1 - k_m} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \psi_n \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle} \quad (4-51)$$

ここで、(4-50)式の即発中性子成分面積 $(\Sigma_{d,k} \tilde{\psi}_p)$ において、仮に何らかの方法により基本モード成分 $\frac{\mathcal{S}_0}{\alpha_0} \langle \Sigma_{d,k} \psi_0 \rangle$ を抽出できたと仮定すると、(4-50)式は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \frac{A_p}{A_d} &= \frac{\frac{\mathcal{S}_0}{\alpha_0} \langle \Sigma_{d,k} \psi_0 \rangle}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_m}{1 - k_m} \frac{\mathcal{S}_n}{\alpha_n} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \psi_n \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle} \langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle} \\ &= \frac{-\rho_0}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\rho_0}{-\rho_m} \frac{\mathcal{S}_n}{\mathcal{S}_0} \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \frac{\langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle}{\langle \Sigma_{d,k} \psi_0 \rangle} \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F}_i \psi_n \rangle}{\langle \Psi_m^\dagger \mathbf{F} \Psi_m \rangle}} \end{aligned} \quad (4-52)$$

(4-52)式において、次モードの k_{eff} 固有値 k_m を用いて、 m 次モードの未臨界面度 $(-\rho_m)$ は以下の

ように定義される。

$$-\rho_m \equiv \frac{1 - k_m}{k_m} \quad (4-53)$$

(4-52)式において、 $m \neq 0$ あるいは $n \neq 0$ の高次モード成分において $\left| \frac{-\rho_0 \delta_n \alpha_0 \langle \Sigma_{d,k} \Psi_m \rangle}{-\rho_m \delta_0 \alpha_n \langle \Sigma_{d,k} \psi_0 \rangle} \right| \ll 1$ と近似できる場合、(4-52)式は次のように簡略化できる。

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{-\rho_0}{\sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_0^\dagger \mathbf{F}_i \psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0^\dagger \mathbf{F} \Psi_0 \rangle}} \quad (4-54)$$

ここで、 Ψ_0 と ψ_0 に直交性が成り立ち $\Psi_0 \approx \psi_0$ と近似できる場合、(4-54)式は以下式のようにドル単位の未臨界度として表せる。

$$\frac{A_p}{A_d} \approx \frac{-\rho_0}{\beta_{\text{eff}}} \quad (4-55)$$

ここで、(4-55)式右辺の分母 β_{eff} は以下式で定義され、実効遅発中性子割合と呼ばれる量である。

$$\beta_{\text{eff}} \equiv \sum_{i=1}^6 \frac{\langle \Psi_0^\dagger \mathbf{F}_i \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0^\dagger \mathbf{F} \Psi_0 \rangle} \quad (4-56)$$

以上で示した(4-55)式から分かるように、基本モード成分のみを抽出することが出来た場合、即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d の比がドル単位の未臨界度に相当することが分かる。

4.3 面積比の推定手法

面積比法では、パルス中性子法の実験結果から即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d の比 A_p/A_d を求めることにより、ドル単位の未臨界度を算出する。但し、4.2節で説明したように、面積比法でドル単位の未臨界度を適切に推定するためには、パルス中性子法実験結果における基本モード成分のみを抽出する必要がある。本節では、基本モード成分の面積比を推定する手法として、従来の外挿面積比法と、本論文で新たに適用を試みたDMDによる面積比の推定方法について説明する。外挿面積比法による面積比の推定方法を4.3.1項、DMDによる面積比の推定方法を4.3.2項で記述する。

4.3.1 外挿面積比法による面積比推定手法

本項では、従来法である外挿面積比法[2],[3],[4]による面積比の推定方法について説明する。

パルス中性子法実験結果におけるパルス中性子打ち込み直後の初期時間ステップでは、中性子計数率の立ち上がり部分や高次モード成分の減衰部分が存在し、それらの部分が即

発中性子成分面積 A_p の値に影響を及ぼす。そこで、従来の外挿面積比法では、マスクング時間を設定して初期時間ステップを使用せずに、実験結果に対して(4-57)式で Fig. 4-2 のようにフィッティングを行い、高次モード成分が含まれている部分を基本モード成分で外挿する。

$$C(t) = C_0 \exp(-at) + C_{BG} \quad (4-57)$$

(4-57)式の C_0 は定数、 C_{BG} は遅発中性子による定常項、 α は即発中性子減衰定数に対応する。

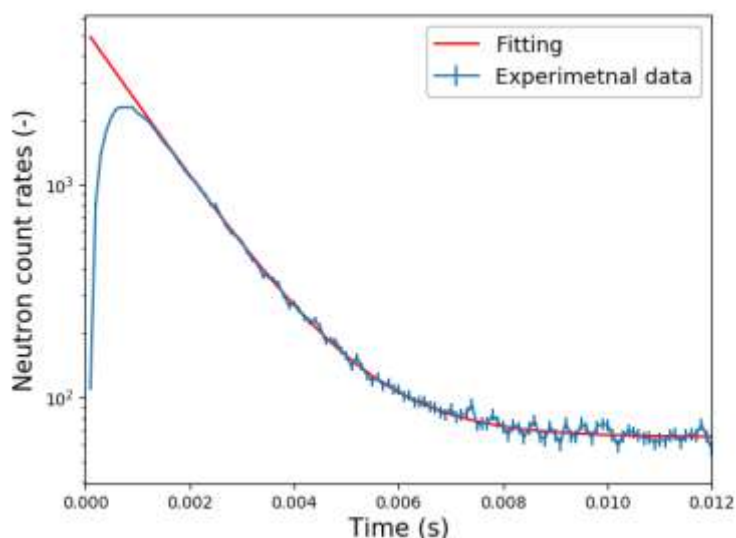


Fig. 4-2 外挿面積比法におけるフィッティングの例

ここで、パルス中性子打ち込み周期を τ とすると、即発中性子成分面積 A_p は(4-57)式の第1項 $C_0 \exp(-at)$ を以下式のように $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで得られる。

$$A_p = \int_0^{\tau} C_0 \exp(-at) dt \quad (4-58)$$

ここで、4.2.1 項の(4-28)式から(4-30)式や、4.2.2 項の(4-35)式で示したように、パルス中性子を一定周期 τ で打ち込み続けた際の中性子計数率を $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分した結果と、パルス中性子を1ショットだけ打ち込んだ際の中性子計数率を $0 \leq t \leq \infty$ で時間積分した結果は等価であると見なせる。従って、(4-58)式は以下のように近似できる。

$$A_p \approx \int_0^{\infty} C_0 \exp(-at) dt = \frac{C_0}{\alpha} \quad (4-59)$$

また、遅発中性子成分面積 A_d は、(4-57)式の第2項 C_{BG} を $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで以下のように得られる。

$$A_d = C_{BG} \tau \quad (4-60)$$

(4-58)式と(4-60)式より、フィッティングに基づいて、パルス中性子法実験結果における即発中性子減衰部分の基本モード成分 $C_0 \exp(-at)$ と定常項 C_{BG} を推定した場合には、面積比

A_p/A_d は以下のように求めることができる。

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{C_0}{\alpha C_{BG} \tau} \quad (4-61)$$

ここまで説明してきた外挿面積比法では、マスクング時間を設定してフィッティングを行うことにより、高次モード成分の影響を軽減することを試みている。但し、第3章 3.4.4.2目で示したように、パルス中性子法実験結果にフィッティングを適用すると、設定したマスクング時間の値によって基本モード成分の α 推定結果が変化するという問題がある。(4-61)式で示されたように、面積比 A_p/A_d を推定するには基本モード成分の α 推定結果が必要となるので、外挿面積比法についても設定したマスクング時間の値によって面積比推定結果が変化するという問題がある。また、同じく第3章 3.4.4.2目より、複数の検出器を用いてパルス中性子法実験結果を取得した場合、フィッティングでは検出器位置によって異なる α 推定結果が得られてしまうことが分かっているため、外挿面積比法についても検出器位置によって面積比推定結果が異なると考えられる。従って、マスクング時間や検出器位置に依らず頑健に面積比を推定できる手法の開発が課題となっている。

4.3.2 DMD による面積比推定手法

本項では、DMD[5],[6]による面積比の推定方法について説明する。

m 個の検出器を用いて、時間ステップ幅 Δt で n ステップに亘ってパルス中性子法における中性子計数率を測定した場合を考える。検出器数 m と時間ステップ数 n の大小関係は $m < n$ とする。この離散的な時系列データを m 行 n 列の行列 \mathbf{X} として整理する。第3章 3.3.4項で有効性を示したように、遅発中性子による定常成分を差し引くため、行列 \mathbf{X} の $(m+1)$ 行目に全時間ステップに亘って1となる定常信号を加える。ここで、行列 \mathbf{X} の1列目から $(n-1)$ 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{1:n-1}$ 、行列 \mathbf{X} の2列目から n 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{2:n}$ として以下式を仮定する。

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{X}_{2:n} \quad (4-62)$$

(4-62)式の行列 \mathbf{A} は時間発展行列である。第3章 3.3.2項で説明したように、時間発展行列 \mathbf{A} は以下のように計算できる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^* \quad (4-63)$$

次に、本研究では Exact DMD [6]を採用しているため、時間発展行列 \mathbf{A} を行列 \mathbf{U} に射影して行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^* \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^* \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \end{aligned} \quad (4-64)$$

計算された行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解することで、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ が得られる。なお、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は \mathbf{A} の相似変換であるので、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値は等しくなる。こうして得られた固有値 λ_i により、以下式によって各モード成分の時定数 ω_i に変換できる。

$$\lambda_i = e^{\omega_i \Delta t}$$

$$\therefore \omega_i = \frac{\ln(\lambda_i)}{\Delta t} \quad (4-65)$$

また、 \mathbf{A} の固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有ベクトル $\vec{\tilde{\phi}}_i$ について、以下のように整理する。

$$\Phi = (\vec{\phi}_1 \quad \vec{\phi}_2 \quad \cdots \quad \vec{\phi}_{m+1}) \quad (4-66)$$

$$\tilde{\Phi} = (\vec{\tilde{\phi}}_1 \quad \vec{\tilde{\phi}}_2 \quad \cdots \quad \vec{\tilde{\phi}}_{m+1}) \quad (4-67)$$

Exact DMD において、 Φ と $\tilde{\Phi}$ の関係は以下式で記述できる。

$$\Phi = \mathbf{X}_{2:n} \mathbf{V} \Sigma^{-1} \tilde{\Phi} \text{diag}(1/\lambda_i) \quad (4-68)$$

(4-68)式の $\text{diag}(1/\lambda_i)$ は対角成分に固有値 λ_i の逆数を持つ対角行列を表す。

ここで、パルス中性子法測定結果における時刻 t を $t = k\Delta t$ (k は0以上の整数)と表す。 $\mathbf{X}_{2:n}$ における任意の列を \vec{x}_k とし、(4-62)式を以下式で書き直す。

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= \mathbf{A} \vec{x}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}^k \vec{x}_0 \\ &= (\Phi \Lambda \Phi^{-1})^k \vec{x}_0 \\ &= \Phi \Lambda^k \Phi^{-1} \vec{x}_0 \\ &= \Phi \Lambda^{t/\Delta t} \Phi^{-1} \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (4-69)$$

(4-69)式の行列 Λ は以下で表される。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\omega_1 \Delta t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\omega_2 \Delta t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{\omega_{m+1} \Delta t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-70)$$

第2章2.3節で示したように、(4-69)式は次のように複数のモードの足し合わせとして表現できる。

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \vec{\phi}_i \exp(\omega_i t) \quad (4-71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_{m+1})^T \\ &= \Phi^{-1} \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (4-72)$$

ここで、 C_i は i 次モード成分の展開係数である。(4-71)式において、高次モード成分を除去するためには、遅発中性子による定常成分に対応する1番目モード $C_1 \vec{\phi}_1 e^{\omega_1 t}$ ($\omega_1 \approx 0$)と、基本モード成分に対応する2番目モード $C_2 \vec{\phi}_2 e^{\omega_2 t}$ ($\omega_2 \equiv -\alpha$)のみを抽出すれば良い。従って、高次モード成分を除去した形で(4-71)式を記述すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= C_1 \vec{\phi}_1 \exp(\omega_1 t) + C_2 \vec{\phi}_2 \exp(\omega_2 t) \\ &= C_2 \vec{\phi}_2 \exp(-\alpha t) + C_1 \vec{\phi}_1 \quad (\because \omega_1 \approx 0, \omega_2 \equiv -\alpha) \end{aligned} \quad (4-73)$$

以上で導出した式変形では、パルス中性子打ち込み時刻 $t = 0$ から測定された中性子計数

率の時系列データを全て利用した場合を想定している。ここで、外挿面積比法と同様にマスク時間 t_{mask} を設定して、時刻 $t = 0$ から $t = t_{\text{mask}}$ までの時間ステップについて DMD の処理から削除する場合について考えることとする。マスクングを行った場合、DMD における行列 \mathbf{X} の1列目のデータが時刻 $t = t_{\text{mask}}$ に対応する。従って、マスクング時間 t_{mask} を設定した場合、DMD による展開式は以下式のように(4-73)式を t_{mask} だけ平行移動させた式となる。

$$\vec{x}(t) = C_2 \vec{\phi}_2 \exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\} + C_1 \vec{\phi}_1 \quad (4-74)$$

パルス中性子打ち込み周期を τ とすると、即発中性子成分面積 A_p は、(4-74)式の第1項 $\exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\}$ を以下式のように $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで得られる。

$$A_p = \int_0^\tau |C_2| |\vec{\phi}_2| \exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\} dt \quad (4-75)$$

4.3.1 項で述べたように、パルス中性子を一定周期 τ で打ち込み続けた際の中性子計数率を $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分した結果と、パルス中性子を1ショットだけ打ち込んだ際の中性子計数率を $0 \leq t \leq \infty$ で時間積分した結果は等価であると見なせる。従って、(4-75)式は以下のように近似できる。

$$A_p \approx \int_0^\infty |C_2| |\vec{\phi}_2| \exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\} dt = \frac{|C_2| |\vec{\phi}_2| \exp(\alpha t_{\text{mask}})}{\alpha} \quad (4-76)$$

また、遅発中性子成分面積 A_d は、(4-74)式の第2項 $C_1 \vec{\phi}_1$ を $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} A_d &= \int_0^\tau |C_1| |\vec{\phi}_1| dt \\ &= |C_1| |\vec{\phi}_1| \tau \end{aligned} \quad (4-77)$$

(4-75)式と(4-77)式より、DMD を用いてパルス中性子法測定結果における定常成分と基本モード成分を抽出した場合には、面積比 A_p/A_d は以下のように求めることができる。

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{|C_2| |\vec{\phi}_2| \exp(\alpha t_{\text{mask}})}{\alpha |C_1| |\vec{\phi}_1| \tau} \quad (4-78)$$

4.4 KUCA パルス中性子法実験結果に対する面積比法の適用

本節では、2019年10月21日(月)から同年11月1日(金)までの期間に京都大学臨界集合体実験装置(KUCA)で取得したパルス中性子法実験結果に対して、面積法を適用した結果について説明する。第3章3.4節でKUCAのパルス中性子法実験結果を用いてDMDにより基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を推定したように、本節では同じパルス中性子法実験結果に対してDMDを適用することにより、基本モード成分の面積比を推定可能か確認することを目的とする。本節では、始めに4.4.1項において、第3章3.4.2項で説明したKUCAパルス中性子法実験における実験体系について簡単に纏め直す。その後、4.4.2項で未臨界

度の異なる 2 つの実験体系でパルス中性子法実験を実施した結果と、2 つの実験体系で取得したパルス中性子法測定結果に対して外挿面積比法と DMD を適用した結果について示す。

4.4.1 実験体系

4.4 節において面積比法を適用する実験体系は、第 3 章 3.4.2 項で示した KUCA の A 架台における「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」である。A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心の概略図を Fig. 4-3 に再掲する。第 3 章 3.4.2 項で説明した通り、A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心には、中心部に燃料として濃縮ウランのみを含む「1/8”p60EUEU 燃料集合体」と「1/8”p10EUEU 燃料集合体」、そして濃縮ウランと天然ウランを含む「EU-Al-NU-Al-EU 燃料集合体」の 3 種類の燃料集合体を用いている。各燃料集合体の構成については、第 3 章 3.4.2.2 目の Fig. 3-4 から Fig. 3-6 で既に示している。燃料領域の周辺には、減速材・反射体としてポリエチレンが用いられている。ポリエチレン反射体領域には核分裂電離箱(FC#1~#3)が設置されており、パルス中性子源に近い FC#3 はパルス中性子法の測定には使用しなかった。パルス中性子法の測定には FC#1,#2 の他に、4 つの BF₃ 検出器(BF₃#1~#4)と 4 つの光ファイバー検出器(Fiber#1~#4)を使用した。BF₃ 検出器と光ファイバー検出器の設置位置については 4.4.2 項で示す。パルス中性子源としては、FFAG 加速器(Fixed-Field Alternating Gradient accelerator)と Pb-Bi ターゲットによる核破砕中性子源を用いた。FFAG 加速器のビーム打ち込み周期は 30 Hz であった。

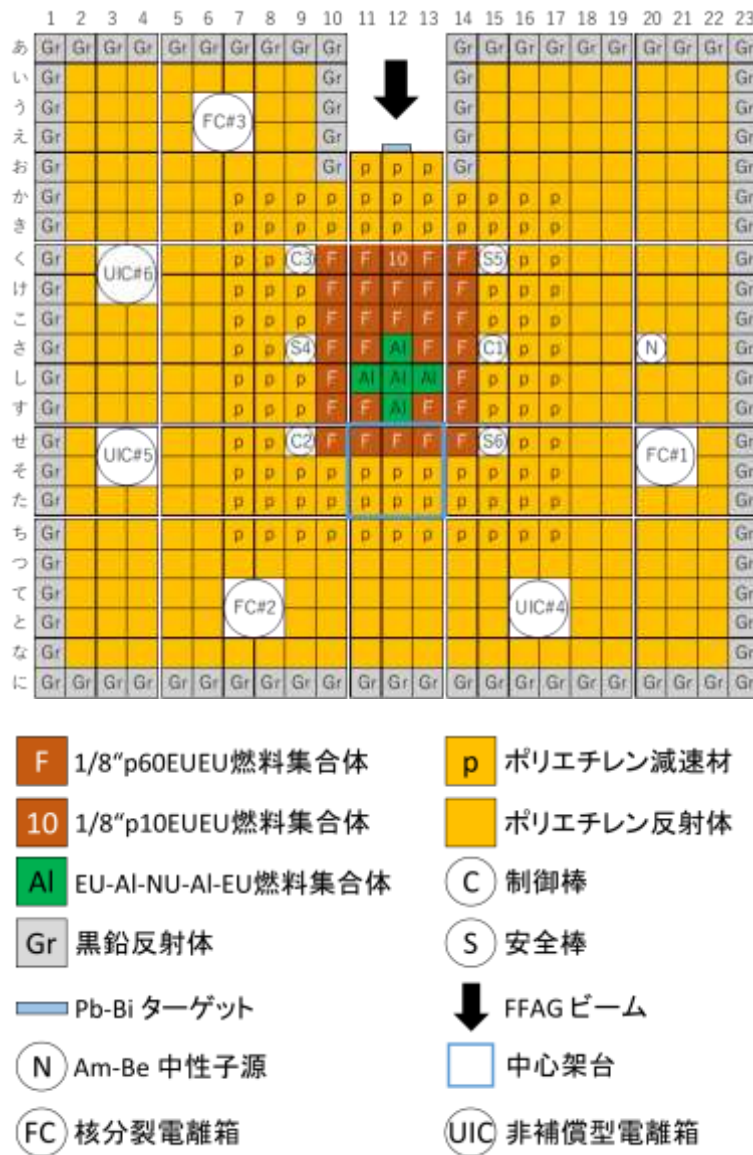


Fig. 4-3 A1/8"EUEU(3)+LEU 炉心の概略図 (再掲)

また、第 3 章 3.4.3 項で説明したように、Fig. 4-3 の実験体系における制御棒値は制御棒落下法[12],[13]、余剰反応度はペリオド法[12],[13]によって測定した。Table. 4-1 に制御棒値と余剰反応度の算出結果を示す。制御棒値と余剰反応度を算出するために用いた崩壊定数 λ_i と相対収率 a_i は、Keepin による遅発中性子パラメータ[14]を用いた。Fig. 4-3 より、制御棒と安全棒は左右対称に配置されているため、対称位置の制御棒と安全棒の制御棒値は等しいと仮定した。Table. 4-1 の各値の不確かさはランダムサンプリング法によって評価した。遅発中性子パラメータ(λ_i, a_i)とペリオド法で測定したペリオドには正規分布による摂動、制御棒落下法によって測定した中性子計数率にはポアソン分布による摂動を加えた。 a_i を摂動させた場合は、摂動後の a_i の総和が 1 となるように規格化した。ランダムサンプリン

グ法におけるサンプルサイズ N は、ランダムサンプリング法における不確かさの相対統計誤差が1%未満となるように $N = 10,000$ とした[15]。

Table. 4-1 制御棒価値と余剰反応度の算出結果（再掲）

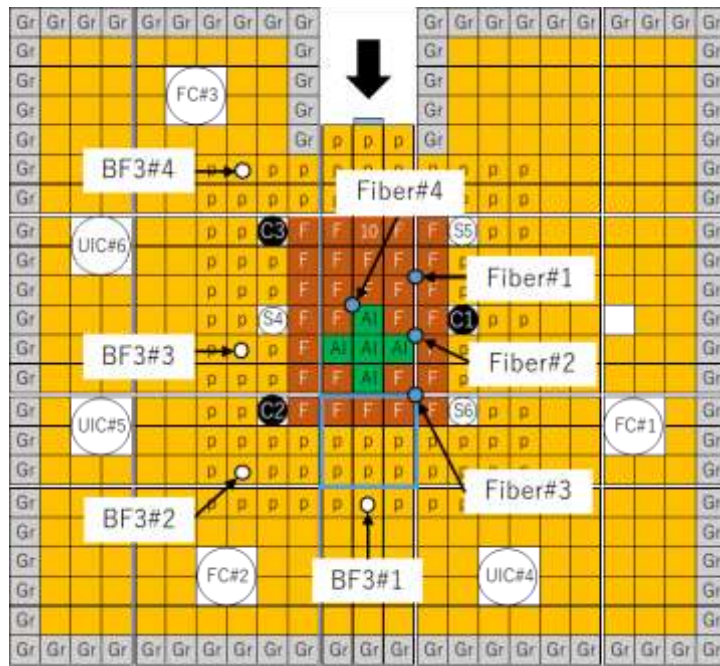
制御棒価値 (\$)	C1, S4	1.203 ± 0.041
	C2, S6	0.408 ± 0.014
	C3, S5	0.408 ± 0.014
余剰反応度 (\$)		0.036 ± 0.001

4.4.2 面積比法の測定と解析

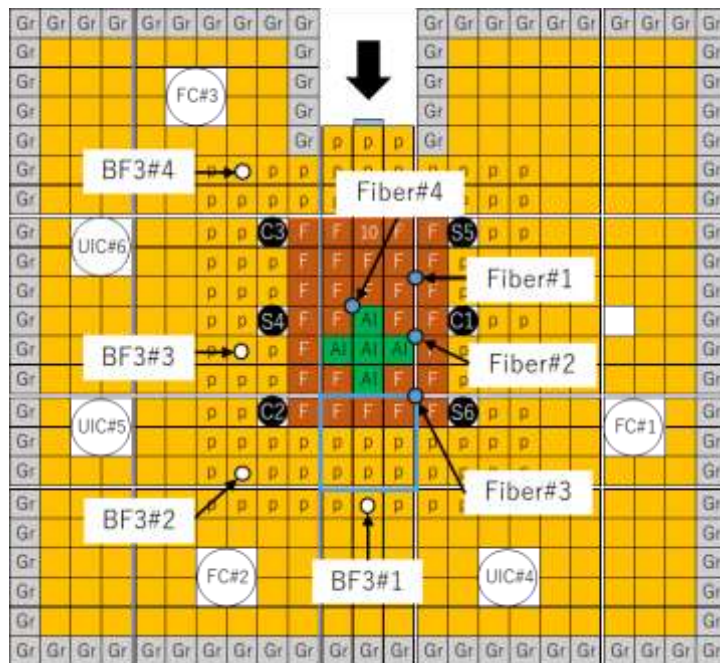
本項では、KUCA で行ったパルス中性子法実験とその解析結果について述べる。4.4.2.1 目にて KUCA で実施したパルス中性子法実験の実験条件と実験結果を示し、4.4.2.2 目でパルス中性子法の実験結果から従来外挿法と DMD により面積比を推定した結果について説明する。

4.4.2.1 実験条件・実験結果

本項で示すパルス中性子法の実験条件と実験結果は、第3章 3.3.4.1 目で示したものと同様である。KUCA で実施したパルス中性子法実験の実験炉心体系を Fig. 4-4、Fig. 4-4 の各炉心体系における実験条件を Table. 4-2、パルス中性子法実験結果を Fig. 4-5 に再掲する。Fig. 4-4、制御棒 C1・C2・C3 のみを挿入した体系を C1C2C3in、全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系を ARI (All Rods In) と呼称している。未臨界が深くなるほど基本モード成分の減衰は速くなり、高次モード成分との分離が難しくなるため、未臨界が深い体系ほど面積比の推定結果に高次モード成分による系統誤差(バイアス)が生じると考えられる。従って、未臨界が浅い体系を C1C2C3in、未臨界が深い体系を ARI として、未臨界度の違いによって外挿面積比法と DMD の面積比推定結果がどのように変化するのか調べるため 2 つの体系で実験を行った。Fig. 4-4 に示す通り、パルス中性子法実験の測定には、減速材領域に設置した 4 つの BF₃ 検出器(BF₃#1~#4)、燃料領域に設置した 4 つの Fiber 検出器(Fiber#1~#4)、反射体領域に備え付けられている 2 つの核分裂電離箱(FC#1,#2)を使用した。Table. 4-2 で示した各炉心体系の未臨界度($-\rho$)は、Table. 4-1 で示した制御棒価値と余剰反応度から算出した。4.4.2.2 目の解析では、Table. 4-2 の未臨界度($-\rho$)の値を面積比の参考値として用いている。Fig. 4-5 の実験結果は、各炉心体系における未臨界定常状態で 1,000 秒間中性子計数率を測定した結果である。パルス中性子打ち込み周期は 30 Hz だったので、合計 30,000 回のパルス中性子打ち込み結果の平均を Fig. 4-5 に図示し、平均値の標準誤差を誤差バーとして示している。標準誤差は中心極限定理に基づいて算出した。なお、Fig. 4-5 におけるパルス中性子打ち込み後の中性子計数率は、 $\Delta t = 0.0001$ s の時間ステップ幅で測定されている。



(a) C1C2C3in

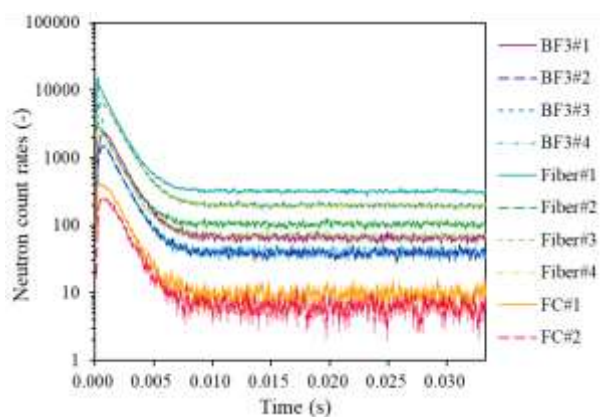


(b) ARI

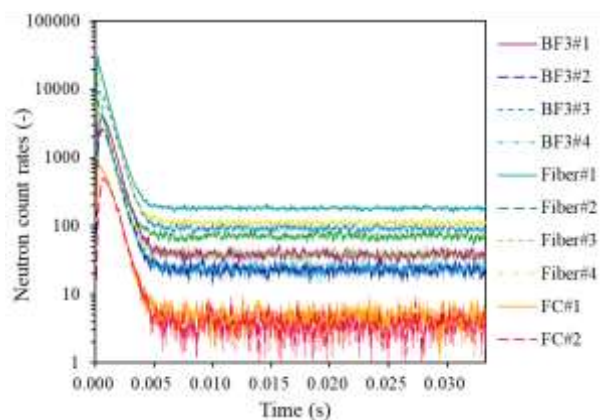
Fig. 4-4 実験炉心体系 (再掲)

Table. 4-2 各炉心体系における実験条件（再掲）

	(a) C1C2C3in		(b) ARI	
制御棒	C1	0 mm	C1	0 mm
	C2	0 mm	C2	0 mm
	C3	0 mm	C3	0 mm
安全棒	S4	1200 mm	S4	0 mm
	S5	1200 mm	S5	0 mm
	S6	1200 mm	S6	0 mm
中心架台	上限		上限	
Am-Be 中性子源	引き抜き		引き抜き	
未臨界度 ($-\rho$)	1.983 ± 0.066 \$		4.001 ± 0.133 \$	



(a) C1C2C3in



(b) ARI

Fig. 4-5 パルス中性子法実験結果（再掲）

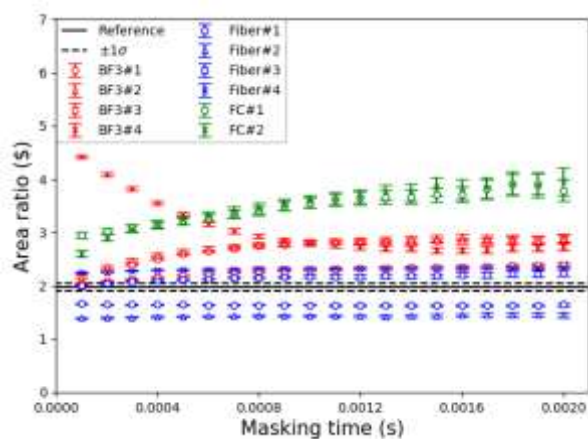
4.4.2.2 DMD と外挿面積比法による解析

C1C2C3in におけるパルス中性子法実験結果に対して従来外挿法と DMD を適用した結果を Fig. 4-6、同様に ARI におけるパルス中性子法実験結果に対して従来外挿法と DMD を適用した結果を Fig. 4-7 に示す。外挿面積比法による面積比の不確かさは誤差伝播則、DMD による面積比の統計誤差は第 2 章 2.5 節で説明したランダムサンプリング法によって評価した。DMD による面積比の不確かさを評価するためのサンプルサイズは 10,000 とした。Fig. 4-6 と Fig. 4-7 の横軸は、パルス中性子法実験結果の中性子計数率立ち上がり部分と高次モード減衰部分を削除するために設定したマスキング時間である。従って、Fig. 4-6 と Fig. 4-7 はマスキング時間に対する面積比推定結果の変動を示した結果となっている。比較のため、Table. 4-2 にて示した未臨界度($-\rho$)の値とその不確かさ 1σ 範囲も参考値として Fig. 4-6 と Fig. 4-7 に示している。

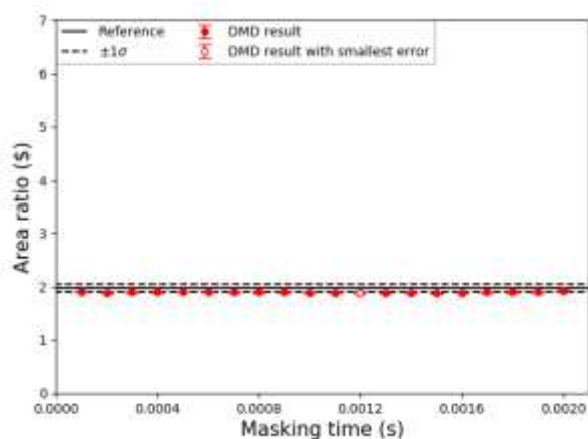
Fig. 4-6 (a) と Fig. 4-7 (a) で示したフィッティングに基づく外挿面積比法の適用結果において、特に BF_3 検出器と核分裂電離箱(FC#1,#2)の面積比推定結果では、マスキング時間による面積比推定結果の変動が大きく、参考値との系統的な差異が生じていることから高次モード成分によるバイアスが見られる。マスキング時間に対する面積比の変動が小さく、高次モード成分の影響が比較的小さい Fiber 検出器の推定結果でも、Fig. 4-7 (a) と Fig. 4-7 (a) の結果を見ると参考値の 1σ 範囲から外れた値が推定されており、未臨界が深い ARI の方が参考値との差異が大きくなっている。これは 4.4.2.1 目で述べたように、未臨界が深くなるほど基本モード成分の減衰が速くなり、基本モード成分と高次モード成分の分離が難しくなることで、基本モード成分の面積比推定結果における高次モード成分のバイアスが大きくなったためと考えられる。また、第 3 章 3.4.4.2 目の従来フィッティング法による α 推定結果と同様に、今回の外挿面積比法においても、検出器毎に面積比推定結果が大きく異なっている。面積比の値を一意に決定するためには複数の検出器結果から 1 つだけ選ぶ必要があるが、事前に参考値が与えられていない場合、どの検出器結果を採用すべきか決定し難い。以上を纏めると、①マスキング時間に対する面積比推定結果の変動が見られ、ほとんどの推定結果が参考値の 1σ 範囲から外れていること、②いずれの検出器結果も参考値から外れた値が推定されていること、③検出器毎に面積比推定結果が大きく異なることから、今回の外挿面積比法による推定結果から面積比を一意に推定することは困難である。

一方、Fig. 4-6 (b) と Fig. 4-7 (b) の DMD による面積比推定結果では、マスキング時間に対して面積比が概ね一定の値で推定されており、外挿面積比法と比べて高次モード成分のバイアスを大幅に低減することができている。DMD の面積比推定結果は、マスキング時間に依らず概ね参考値の 1σ 範囲と一致していることから、DMD によりパルス中性子法実験結果を(4-74)式のように展開することで、基本モード成分の面積比を頑健に推定可能であることが確認された。DMD ではマスキング時間による面積比推定結果の変動が小さく、複数の検出器結果から 1 つの面積比を推定することができるため、第 3 章 3.4.4.2 目の DMD による α 推定結果と同様に、DMD による面積比推定結果は不確かさが最小となるマスキング

時間を選べば良い。Fig. 4-6 (b)と Fig. 4-7 (b)において面積比の統計誤差が最小となるマスク
 ング時間と、そのマスクング時間における面積比推定結果を Table. 4-3 に纏めた。DMD は
 従来外挿法とは異なり面積比推定結果を一意に決定することができることから、DMD は従
 来外挿法の課題を克服していることが分かる。

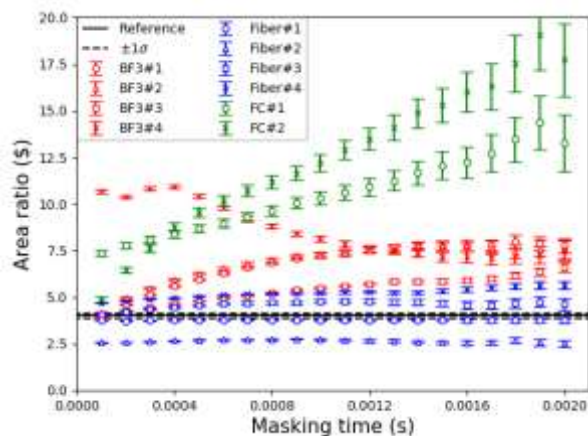


(a) 外挿面積比法

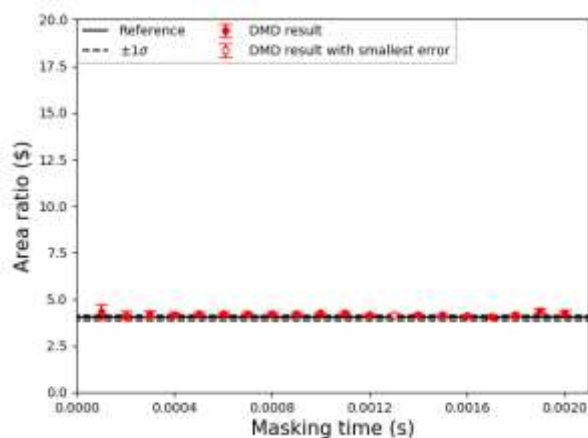


(b) DMD

Fig. 4-6 C1C2C3in における面積比推定結果



(a) 外挿面積比法



(b) DMD

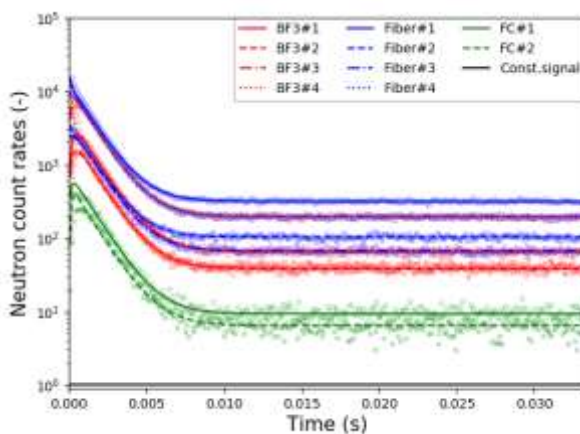
Fig. 4-7 ARI における面積比推定結果

Table. 4-3 DMD による面積比推定結果

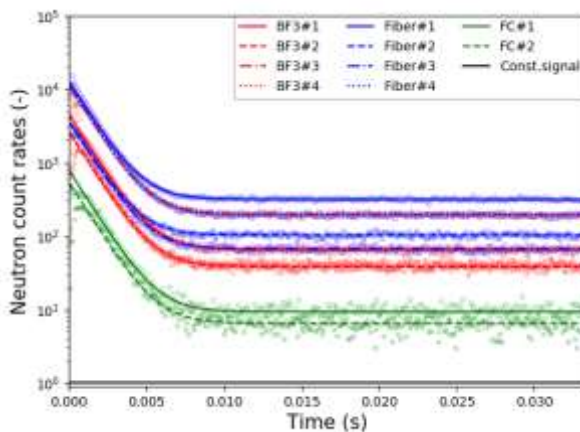
	C1C2C3in	ARI
マスクング時間 (s)	0.0012	0.0013
面積比推定結果 (\$)	1.889 ± 0.005	4.156 ± 0.043

DMD による面積比推定結果は、いずれのマスクング時間においても参考値の 1σ 範囲と一致したため、DMD を用いることで Fig. 4-5 のパルス中性子法実験結果を高次モード成分の影響を低減した形で Fig. 4-5 展開することができたと考えられる。このことを確認するため、マスクング時間 0.0001 s において、C1C2C3in の実験結果を(4-71)式で展開した結果(全モードで展開した結果)と(4-73)式で展開した結果(1 番目と 2 番目のモードのみで展開した結果)を Fig. 4-8、ARI の実験結果を DMD で同様に展開した結果を Fig. 4-9 に示す。Fig. 4-8 と Fig. 4-9 では、DMD による展開結果をプロット線で示し、比較として Fig. 4-5 のパルス中

中性子法測定結果をプロット点で示している。全モードで展開した Fig. 4-8 (a)と Fig. 4-9 (a)において、DMD による展開結果は、中性子計数率の立ち上がり部分も含めて Fig. 4-5 のパルス中性子法実験結果を再現することが出来ている。一方、高次モード成分を除去して1番目と2番目のモードのみで展開した Fig. 4-8 (b)と Fig. 4-9 (b)では、対数目盛において中性子計数率が直線的に減衰している部分と定常部分しか見られないことから、中性子計数率の立ち上がり部分と高次モード減衰部分は除かれており、元のパルス中性子法実験結果において支配的な時間変化構造が抽出されていることが分かる。従って、1番目と2番目のモードのみを抽出してパルス中性子法実験結果を展開することにより、高次モード成分の影響を低減した形で即発中性子成分面積 A_p を推定することができたため、DMD で面積比を頑健に推定することが可能になったと言える。

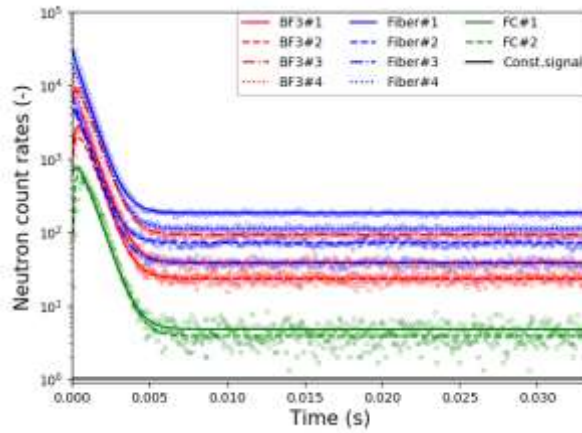


(a) 全モードで展開

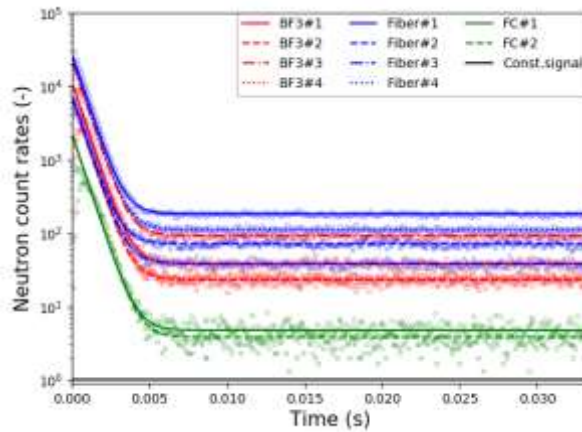


(b) 1番目と2番目のモードのみで展開

Fig. 4-8 C1C2C3in の実験結果を DMD によって展開した結果



(a) 全モードで展開



(b) 1番目と2番目のモードのみで展開

Fig. 4-9 ARIの実験結果をDMDによって展開した結果

4.5 本章のまとめ

本章では、主に面積比法の理論式の導出、外挿面積比法とDMDによる面積比の推定方法、KUCAで取得したパルス中性子法実験結果に対して面積比法を適用した結果について説明した。

4.1節では、本章の概要を説明した。

4.2節では、パルス中性子法実験結果における即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d の理論式を導出し、面積比 A_p/A_d がドル単位未臨界度に相当することを示した。即発中性子成分面積比 A_p は、 α 固有値方程式における固有関数 $\psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を用いてパルス中性子打ち込み後の即発中性子束 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ を導出し、 $\psi_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ を $0 \leq t \leq \infty$ で時間積分した $\tilde{\psi}_p(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ と巨視的検出反応断面積 $\Sigma_{d,k}(\vec{r}, E)$ の積を全位相空間で積分することにより導出した。遅発中性子成分面積 A_d は、 k_{eff} 固有値方程式における固有関数 $\Psi_m(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を用いてパ

ルス中性子打ち込み後の遅発中性子束 $\psi_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ を $0 \leq t \leq \infty$ で時間積分した $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ を導出し、 $\tilde{\psi}_d(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ と $\Sigma_{d,k}(\vec{r}, E)$ の積を全位相空間で積分することで導出した。このようにして導出した A_p と A_d から面積比 A_p/A_d の理論式を示した。 A_p/A_d の理論式において、即発中性子成分面積の基本モード成分を何らかの手法で抽出することができれば、面積比 A_p/A_d はドル単位の未臨界度 $(-\rho/\beta_{\text{eff}})$ に相当することを示した。

4.3 節では、従来法である外挿面積比法と、本研究で新たに考案した DMD による面積比の推定方法について説明した。外挿面積比法では、マスクング時間を設定してパルス中性子法の中性子計数率 $C(t)$ において高次モード成分が残存している時間ステップを削除した上で、フィッティング式 $C(t) = C_0 \exp(-at) + C_{\text{BG}}$ を用いてパルス中性子法実験結果の高次モード成分が含まれている部分を基本モード成分で外挿する。フィッティングにより $\alpha, C_0, C_{\text{BG}}$ を推定し、フィッティング式の第 1 項 $C_0 e^{-at}$ と第 2 項 C_{BG} をそれぞれ $0 \leq t \leq \tau$ (τ : パルス中性子打ち込み周期)で時間積分することで A_p と A_d を計算し、面積比 A_p/A_d を求めることでドル単位未臨界度を推定する。一方、DMD では、始めは Simmons-King 法に対する適用方法と同様に、複数の検出器で測定した $C(t)$ から行列 \mathbf{X} を作成し、遅発中性子による定常成分の影響を差し引くため全時間ステップに渡って 1 となる定常信号を行列 \mathbf{X} に追加した。定常信号を追加した行列 \mathbf{X} から Exact DMD により時間発展行列 \mathbf{A} を求め、 \mathbf{A} の固有値分解により各モード成分の固有値 λ_i ・固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ を得る。各モード成分の固有値 λ_i は $\omega_i = \ln(\lambda_i)/\Delta t$ (Δt : $C(t)$ の時間ステップ幅)という式によって各モード成分の時定数 ω_i に変換する。ここで、 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルから定常信号を追加した時系列データを $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \vec{\phi}_i \exp(\omega_i t)$ (C_i : i 次モード成分の展開係数)という式に展開する。高次モード成分を除去するため、遅発中性子による定常成分に対応する 1 番目モード $C_1 \vec{\phi}_1 \exp(\omega_1 t)$ ($\omega_1 \approx 0$)と、基本モード成分に対応する 2 番目モード $C_2 \vec{\phi}_2 \exp(\omega_2 t)$ ($\omega_2 \equiv -\alpha$)のみを抽出して、時系列データを $\vec{x}(t) = C_2 \vec{\phi}_2 \exp(-at) + C_1 \vec{\phi}_1$ と展開する。なお、外挿面積比法と同様にマスクング時間 t_{mask} を設定する場合は、時系列データを $\vec{x}(t) = C_2 \vec{\phi}_2 \exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\} + C_1 \vec{\phi}_1$ という式で展開する。DMD により展開された時系列データ $\vec{x}(t)$ の第 1 項 $C_2 \vec{\phi}_2 \exp\{-\alpha(t - t_{\text{mask}})\}$ と第 2 項 $C_1 \vec{\phi}_1$ をそれぞれ $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで A_p と A_d を計算し、面積比 A_p/A_d を高次モード成分の影響を低減した形で推定することとした。

4.4 節では、KUCA で取得したパルス中性子法実験結果に対して面積比法を適用した結果について説明した。4.4 節で面積比法を適用した実験体系は、第 3 章 3.4.2 項で示したものと同様であり、KUCA の A 架台における「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」で実験を行った。パルス中性子法実験の測定には、減速材領域に設置した BF_3 検出器 4 個、燃料領域に設置した光ファイバー検出器 4 個、反射体領域に備え付けられている核分裂電離箱(FC)2 個を使用した。実験体系における制御棒価値は制御棒落下法により測定し、余剰反応度はペリオド法により測定した。今回のパルス中性子法実験では、未臨界度の違いによって外挿面積比法と DMD による面積比推定結果がどのように変化するか調べるため、制御棒 C1・C2・C3 のみを全挿入した体系(C1C2C3in)と、全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系(ARI)で測定を行った。

パルス中性子法実験結果に対して外挿面積比法を適用した結果、推定された面積比の値はマスクング時間に対して大きく変動し、検出器毎に面積比推定結果が大きく異なっていたことから、参考値が予め与えられていなければ面積比の値を一意に決定することが困難であった。一方 DMD を適用した結果、マスクング時間に対して面積比が概ね一定の値で推定されており、従来外挿法と比べて高次モード成分のバイアスを大幅に低減することができた。DMD による面積比推定結果はマスクング時間に依らず参考値の 1σ 範囲で一致しているため、DMD による面積比の値は不確かさが最小となる推定結果を選べば良く、C1C2C3in では 1.889 ± 0.005 (\$)、ARI では 4.156 ± 0.043 (\$) となった。また、パルス中性子法実験結果を DMD により展開した結果、全モードで展開した場合は中性子計数率の立ち上がり部分も含めて実験結果を再現することができた。一方、DMD で得られた 1 番目と 2 番目のモードのみで展開した場合は、中性子計数率の立ち上がり部分と高次モード成分の減衰部分は除去できており、元の時系列データにおいて支配的な時間変化構造が抽出された。従って、時系列データを複数のモードに分解した上で、1 番目と 2 番目のモードのみを抽出して時系列データを展開することにより、高次モード成分の影響を排除した形で即発中性子成分面積 A_p を推定できるので、DMD で面積比を頑健に推定することが可能となったと考えられる。

参考文献

- [1] N. G. Sjöstrand, “Measurements on a Subcritical Reactor Using a Pulsed Neutron Source,” *Arkiv för Fysik*, **11**, pp. 233–246 (1956).
- [2] T. Gozani, “A Modified Procedure for the Evaluation of Pulsed Source Experiments in Subcritical Reactors,” *Nukleonik*, **4**, pp. 348–349 (1962).
- [3] E. Garelis, and J. L. Russel, “Theory of pulsed neutron source measurements,” *Nucl. Sci. Eng.*, **16**, 3, pp.263–270 (1963).
- [4] T. Yamamoto, and H. Sakamoto, “Effect of higher harmonics in the area-ratio pulsed neutron source technique,” *Prog. Nucl. Energy*, **108**, pp.286–294 (2018).
- [5] P. J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data,” *J. Fluid Mech.*, **656**, pp.5-28, (2010).
- [6] J. H. Tu et al., “On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications,” *J. Comput. Dyn.*, **1**(2), pp. 391–421 (2014).
- [7] 塩澤武司, “固有中性子源を用いた中性子源増倍法と Feynman- α 法による未臨界度測定に関する研究,” 修士論文, 名古屋大学, (2015).
- [8] T. Endo, Y. Yamane, and A. Yamamoto, “Space and Energy Dependent Theoretical Formula for the Third Order Neutron Correlation Technique,” *Ann. Nucl. Energy*, **33**, pp. 521-537, (2006).
- [9] S. Yun, and N. Z. Cho, “Acceleration of source convergence in Monte Carlo k-eigenvalue problems via anchoring with a p-CMFD deterministic method,” *Ann. Nucl. Energy.*, **37**, 12, pp. 1649-1658 (2010).
- [10] J. Willert, et al., “A comparison of acceleration methods for solving the neutron transport k-eigenvalue problem,” *J. Comput. Phys.*, **274**, pp. 681-694 (2014).
- [11] V. Vitali, et al., “Comparison of direct and adjoint k and α -eigenfunctions,” *J. Nucl. Eng.*, **2**, 2, pp. 131-151 (2021).
- [12] 三澤毅, 宇根崎博信, 卞哲浩, “原子炉物理実験,” 京都大学学術出版会, 日本, ISBN978-4-87698-977-5 (2010).
- [13] 丸山博見, 岩崎智彦, 山本章夫, 中島健, 岡島成晃, 熊谷明, “シリーズ 現代核科学の基礎 1 原子炉物理,” 社団法人原子力学会, (2008).
- [14] G.R. Keepin, *Physics of Nuclear Kinetics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA (1965).
- [15] B. Foad, A. Yamamoto, and T. Endo, “Uncertainty and regression analysis of the MSLB accident in PWR based on unscented transformation and low rank approximation,” *Ann. Nucl. Energy.*, **143**, 107493 (2020).

第5章 Rossi- α 法に対する DMD の適用

5.1 本章の概要

本章では、即発中性子減衰定数 α を測定するための実験手法の一つである Rossi- α 法[1]の理論と、京都大学臨界集合体実験装置(Kyoto University Critical Assembly: KUCA)にて実際に行った原子炉雑音測定実験結果に対して Dynamic Mode Decomposition (DMD)を適用し、基本モード成分の α を推定した結果について述べる。

第1章 1.1.2 項で説明したように、Rossi- α 法では原子炉雑音測定結果から中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成し、従来手法では $P(\tau)$ に対して指数関数でフィッティングすることで即発中性子減衰定数 α を推定する。 α の推定にフィッティングを用いるということは、Simmons-King 法[2]における従来フィッティング法と同様に、 α の推定結果に高次モード成分による系統的差異(バイアス)が存在する可能性がある。また、第3章 3.4.4.2 目で示したように、従来フィッティング法で複数の検出器を使用した場合、検出器の位置によってそれぞれ異なる α の値が推定され、事前に α の参考値が与えられなければ α 推定結果を一意に決定することが難しい。そこで、Rossi- α 法に対しても Dynamic Mode Decomposition (DMD) [3],[4]の適用を試み、Rossi- α 法における従来フィッティング法の課題を DMD により解決可能か確認することを本章の目的とする。

5.2 節では、Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の理論式の導出を行う。 $P(\tau)$ の理論式の導出に当たって、まず 1 時点検出確率と 2 時点検出確率について説明し、それぞれの確率の導出を行う。その後、導出した 1 時点検出確率と 2 時点検出確率から $P(\tau)$ の理論式の導出を行う。

5.3 節では、Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ から即発中性子減衰定数 α を推定する手法について纏める。本節では、 α の推定手法として、従来法であるフィッティング法と、本論文で新たに適用を試みた DMD による α の推定方法を纏める。

5.4 節では、KUCA で行った原子炉雑音測定実験とその解析結果について述べる。最初に KUCA で行った原子炉雑音測定実験の実験炉心体系・燃料集合体の構成・使用した検出器と計測機器について纏める。次に、制御棒落下法による制御棒価値測定結果、ペリオド法による余剰反応度の測定結果を示す。その次に、制御棒・安全棒の挿入条件などを変更し、様々な実験条件において原子炉雑音を測定した結果について述べる。本節では、①実験体系を臨界にした状態、②実験体系における全ての制御棒・安全棒を全挿入した状態、③実験体系の運転が停止した状態における Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を示し、それぞれの測定で得た $P(\tau)$ に対して DMD と従来フィッティング法を適用した結果について説明する。

最後に、5.6 節で本章のまとめを述べる。

5.2 Rossi- α 法の理論

第1章 1.1.2 項で説明したように、Rossi- α 法では原子炉雑音測定結果から中性子が検出された2時点の検出時間間隔 τ を計算し、検出された全ての中性子の組み合わせについて検出時間間隔 τ を求めて、 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成することで即発中性子減衰定数 α を得る。本項では、Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の理論式を1時点検出確率と2時点検出確率から導出する。1時点検出確率については5.2.1 項、2時点検出確率については5.2.2 項で説明する。5.2.3 項では、5.2.1 項と5.2.2 項で導出した1時点検出確率と2時点検出確率から $P(\tau)$ の理論式を導出する。

5.2.1 1時点検出確率

1時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ とは、定常未臨界状態において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ に1個の中性子が検出される確率である[5]。ここで、位置 \vec{r}_s における中性子投入頻度が $S(\vec{r}_s)$ となる外部中性子源が存在する定常未臨界体系を考える。この体系において、Fig. 5-1 のように時刻 t_s で外部中性子源による中性子が投入された後、時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ で中性子が検出される確率 $P_1(t_1, t_s)dt_1 dt_s$ を求める。Fig. 5-1 における中性子の検出は、投入された中性子が直接検出される場合だけでなく、投入された中性子によって発生した核分裂連鎖反応による子孫中性子が検出される場合も含む。

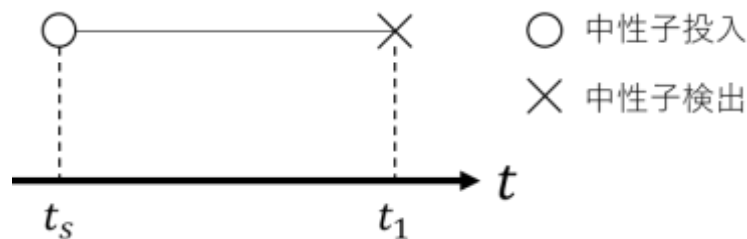


Fig. 5-1 1時点中性子検出過程

確率 $P_1(t_1, t_s)dt_1 dt_s$ を求めるに当たって、まず時刻 t_s において位置 \vec{r}_s に外部中性子源による中性子が投入される確率を $S(\vec{r}_s)d\vec{r}_s dt_s$ とする。次に、外部中性子源から q 個の中性子が投入される確率を $p_s(q)$ とすると、外部中性子源から発生する中性子数の期待値は $\sum_{q=0}^{\infty} qp_s(q)$ と表せる。また、外部中性子源によりエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中性子が投入される確率を $(\chi_s(E_s)/4\pi)dE_s d\vec{\Omega}_s$ とする。ただし、 $\chi_s(E)$ は外部中性子源から発生する中性子のエネルギースペクトルを表す。ここで、第3章 3.2.1 項で導出したグリーン関数[5]を導入すると、時刻 t_s において位置 \vec{r}_s にエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t_1 における位置 \vec{r}_1 、エネルギー E_1 、方向 $\vec{\Omega}_1$ の中性子数は以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1 | \vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s, t_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_n^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s) e^{-\alpha_n(t_1 - t_s)} \quad (5-1)$$

(5-1)式の α_n は n 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_n(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1)$ は α_n に対応する n 次モード成分の固有関数、 $\psi_n^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s)$ は α_n に対応する n 次モード成分の随伴固有関数である。最後に、位相空間 $(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1)$ に存在する中性子が検出される確率は、巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ を用いて $v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ と表せる。 $v(E_1)$ はエネルギー E_1 の中性子速度である。

以上より、①時刻 t_s 、位置 \vec{r}_s で外部中性子源による中性子が投入される確率 $S(\vec{r}_s)d\vec{r}_s dt_s$ 、②外部中性子源から発生する中性子数の期待値 $\sum_{q=0}^{\infty} qp_s(q)$ 、③外部中性子源による中性子がエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ に投入される確率 $(\chi_s(E_s)/4\pi)dE_s d\vec{\Omega}_s$ 、④(5-1)式で記述されるグリーン関数 $G(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1 | \vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s, t_s)$ 、⑤位相空間 $(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1)$ の中性子が検出される確率 $v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ を掛け合わせ、その積を全空間・全エネルギー・全方向で積分することにより、時刻 t_s で中性子が投入された後に時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ で中性子が検出される確率 $P_1(t_1, t_s)dt_1 dt_s$ が以下のように表せる。

$$\begin{aligned} & P_1(t_1, t_s)dt_1 dt_s \\ &= \int_V S(\vec{r}_s)d\vec{r}_s dt_s \sum_{q=0}^{\infty} qp_s(q) \int_0^\infty dE_s \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \\ & \times \int_V d\vec{r}_1 \int_0^\infty dE_1 \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_1 v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_n^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s) e^{-\alpha_n(t_1 - t_s)} \end{aligned} \quad (5-2)$$

外部中性子による中性子の投入は時刻 $-\infty \sim t_1$ の間に起こり得るので、(5-2)式において t_s を区間 $(-\infty, t_1)$ で時間積分することにより、時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ に中性子が検出される1時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} P_1(t_1)dt_1 &= \int_{-\infty}^{t_1} P(t_1, t_s)dt_1 dt_s \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n D_n}{\alpha_n} dt_1 \end{aligned} \quad (5-3)$$

$$S_n \equiv \int_V S(\vec{r})d\vec{r} \sum_{q=0}^{\infty} qp_s(q) \Psi_{s,n}^\dagger(\vec{r}) \quad (5-4)$$

$$\Psi_{s,n}^\dagger(\vec{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \psi_n^\dagger(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (5-5)$$

$$D_n \equiv \int_V d\vec{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} v(E)\Sigma_d(\vec{r}, E) \psi_n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (5-6)$$

(5-4)式の S_n は単位時間あたりに外部中性子源によって n 次モード成分の中性子が投入される確率、(5-5)式の $\Psi_{s,n}^\dagger(\vec{r})$ は位置 \vec{r} で外部中性子源により投入された n 次モード成分の随伴中性子束、(5-6)式の D_n は単位時間あたりに n 次モード成分の中性子が検出される確率を表す[5]。

5.2.2 2時点検出確率

2時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ とは、定常未臨界状態において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ に中性子のペアが検出される確率である[5]。本項では、検出された中性子ペアが別の核分裂連鎖系に属する場合(非相関の中性子ペアを検出する場合)の2時点検出確率を5.2.2.1目、検出された中性子ペアが同じ核分裂連鎖系に属する場合(相関を持つ中性子ペアを検出する場合)の2時点検出確率を5.2.2.2目でそれぞれ説明する。

5.2.2.1 非相関の中性子ペアが検出される確率

Fig. 5-2のように、時刻 t_{s1} と時刻 t_{s2} で体系に独立に投入された2つの異なる中性子、またはそれらの中性子によって発生した2つの独立な核分裂連鎖系に属する子孫中性子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出されるケースを考える。

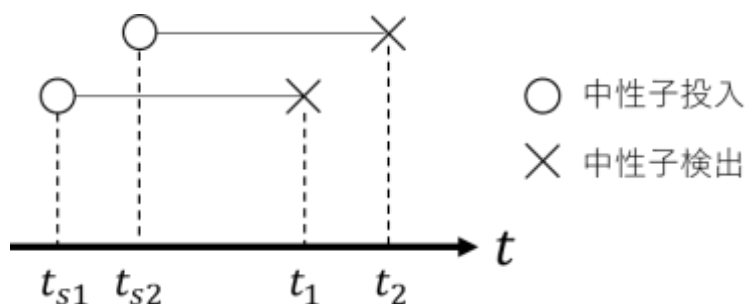


Fig. 5-2 独立に投入された2つの中性子による2時点検出過程

まず、1つ目の核分裂連鎖系に属する中性子が時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ で検出される確率は5.2.1項で導出した1時点検出確率より $P_1(t_1)dt_1$ で表される。同様に、2つ目の核分裂連鎖系に属する中性子は $P_1(t_2)dt_2$ と表せる。2つの核分裂連鎖系は独立であるため、検出された中性子ペアが別の核分裂連鎖系に属する確率、すなわち非相関の中性子ペアが検出される確率 $P_u(t_1, t_2)dt_1dt_2$ は以下のように表せる。

$$P_u(t_1, t_2)dt_1dt_2 = P_1(t_1)P_1(t_2)dt_1dt_2 \quad (5-7)$$

5.2.2.2 相関を持つ中性子ペアが検出される確率

検出された中性子ペアが相関を持つケースとして、①同一の核分裂連鎖系が核分裂反応で分岐して2つの中性子が検出されるケース、②外部中性子源により同時に投入された中性子によって核分裂連鎖系が分岐して2つの中性子が検出されるケースがある。本項では、それぞれのケースにおける2時点検出確率について説明する。

● 同一の核分裂連鎖系が核分裂反応で分岐するケース

Fig. 5-3 に示すように時刻 t_s で体系に中性子が投入され、時刻 t_f で核分裂反応によって核分裂連鎖系が分岐し、分岐した核分裂連鎖系に属する中性子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される確率 $P_f(t_1, t_2, t_s, t_f) dt_1 dt_2 dt_s dt_f$ を求める。

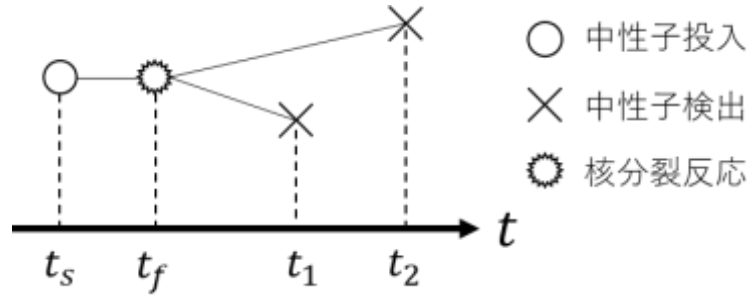


Fig. 5-3 同一の核分裂連鎖系が核分裂反応で分岐した時の2時点検出過程

確率 $P_f(t_1, t_2, t_s, t_f) dt_1 dt_2 dt_s dt_f$ を求めるに当たって、まず時刻 t_s において位置 \vec{r}_s に外部中性子源による中性子が投入される確率を $S(\vec{r}_s) d\vec{r}_s dt_s$ とする。次に、外部中性子源から q 個の中性子が投入される確率を $p_s(q)$ とすると、外部中性子源から発生する中性子数の期待値は $\sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q)$ と表せる。また、外部中性子源によりエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中性子が投入される確率を $(\chi_s(E_s)/4\pi) dE_s d\vec{\Omega}_s$ とする。ここで、グリーン関数を導入すると、時刻 t_s において位置 \vec{r}_s にエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t_f における位置 \vec{r}_f 、エネルギー E_f 、方向 $\vec{\Omega}_f$ の中性子数は以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f, t_f | \vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s, t_s) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f) \psi_l^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s) e^{-\alpha_l(t_f - t_s)} \quad (5-8)$$

(5-8)式の α_l は l 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_l(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f)$ は α_l に対応する l 次モード成分の固有関数、 $\psi_l^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s)$ は α_l に対応する l 次モード成分の随伴固有関数である。位相空間 $(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f, t_f)$ に存在する中性子が核分裂反応を起こす確率は、巨視的核分裂反応断面積 $\Sigma_f(\vec{r}_f, E_f)$ を用いて $v(E_f) \Sigma_f(\vec{r}_f, E_f)$ と表せる。 $v(E_f)$ はエネルギー E_f の中性子速度である。ここで、核分裂反応により ν 個の中性子が発生する確率を $p_f(\nu, E_f)$ とすると、時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される中性子の先祖の組み合わせは $\nu(\nu - 1)$ 通りとなるので、異なる2時刻で検出される中性子の先祖数の期待値は $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu - 1) p_f(\nu, E_f)$ となる。核分裂反応が起こった際、エネルギー E'_f 、方向 $\vec{\Omega}'_f$ の中性子が発生する確率を $(\chi_f(E'_f)/4\pi) dE'_f d\vec{\Omega}'_f$ とする。 $\chi_f(E_f)$ は核分裂スペクトルを表す。核分裂反応により、時刻 t_f において位置 \vec{r}_f にエネルギー E'_f 、方向 $\vec{\Omega}'_f$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t_1 における位置 \vec{r}_1 、エネルギー E_1 、方向 $\vec{\Omega}_1$ の中性子数はグリーン関数より以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1 | \vec{r}_f, E'_f, \vec{\Omega}'_f, t_f) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_m^\dagger(\vec{r}_f, E'_f, \vec{\Omega}'_f) e^{-\alpha_m(t_1 - t_f)} \quad (5-9)$$

(5-9)式の α_m は m 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1)$ は α_m に対応する m 次モード成分の固有関数、 $\psi_m^\dagger(\vec{r}_f, E_f', \vec{\Omega}_f')$ は α_m に対応する m 次モード成分の随伴固有関数である。位相空間 $(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1)$ に存在する中性子が検出される確率は、巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ を用いて $v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ と表せる。 $v(E_1)$ はエネルギー E_1 の中性子速度である。また、核分裂反応によりエネルギー E_f'' 、方向 $\vec{\Omega}_f''$ の中性子が発生する確率を $(\chi_f(E_f'')/4\pi)dE_f''d\vec{\Omega}_f''$ とする。核分裂反応により、時刻 t_f において位置 \vec{r}_f にエネルギー E_f'' 、方向 $\vec{\Omega}_f''$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t_2 における位置 \vec{r}_2 、エネルギー E_2 、方向 $\vec{\Omega}_2$ の中性子数はグリーン関数より以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2, t_2 | \vec{r}_f, E_f'', \vec{\Omega}_f'', t_f) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2) \psi_n^\dagger(\vec{r}_f, E_f'', \vec{\Omega}_f'') e^{-\alpha_n(t_2-t_f)} \quad (5-10)$$

(5-10)式の α_n は n 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2)$ は α_n に対応する n 次モード成分の固有関数、 $\psi_n^\dagger(\vec{r}_f, E_f'', \vec{\Omega}_f'')$ は α_n に対応する n 次モード成分の随伴固有関数である。位相空間 $(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2, t_2)$ に存在する中性子が検出される確率は、巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\vec{r}_2, E_2)$ を用いて $v(E_2)\Sigma_d(\vec{r}_2, E_2)$ と表せる。 $v(E_2)$ はエネルギー E_2 の中性子速度である。

これまでの説明で定義してきた確率、期待値、グリーン関数を掛け合わせ、全空間・全エネルギー・全方向で積分することにより、確率 $P_f(t_1, t_2, t_s, t_f)dt_1dt_2dt_sdt_f$ を以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & P_f(t_1, t_2, t_s, t_f)dt_1dt_2dt_sdt_f \\ &= \int_V S(\vec{r}_s) d\vec{r}_s dt_s \sum_{q=0}^{\infty} qp_s(q) \int_0^{\infty} dE_s \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \\ & \times \int_V d\vec{r}_f \int_0^{\infty} dE_f \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_f v(E_f) \Sigma_f(\vec{r}_f, E_f) \\ & \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) p_f(\nu, E_f) \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f) \psi_l^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s) e^{-\alpha_l(t_f-t_s)} \\ & \times \int_0^{\infty} dE_f' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_f' \frac{\chi_f(E_f')}{4\pi} \int_0^{\infty} dE_f'' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_f'' \frac{\chi_f(E_f'')}{4\pi} \\ & \times \int_V d\vec{r}_1 \int_0^{\infty} dE_1 \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_1 v(E_1) \Sigma_d(\vec{r}_1, E_1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_m^\dagger(\vec{r}_f, E_f', \vec{\Omega}_f') e^{-\alpha_m(t_1-t_f)} \\ & \times \int_V d\vec{r}_2 \int_0^{\infty} dE_2 \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_2 v(E_2) \Sigma_d(\vec{r}_2, E_2) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2) \psi_n^\dagger(\vec{r}_f, E_f'', \vec{\Omega}_f'') e^{-\alpha_n(t_2-t_f)} \end{aligned} \quad (5-11)$$

時刻 t_f における核分裂反応は時刻 $t_s \sim t_1$ の間のいずれかの時刻で発生し、時刻 t_s における中性子の投入は時刻 $-\infty \sim t_1$ の間のいずれかの時刻で発生する。従って、(5-11)式において t_f を区間 (t_s, t_1) 、 t_s を区間 $(-\infty, t_1)$ で時間積分することで、体系に中性子が投入された後、核分裂反応によって分岐した核分裂連鎖系に属する中性子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される確率 $P_f(t_1, t_2)dt_1dt_2$ を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
P_f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{t_s}^{t_1} P_f(t_1, t_2, t_s, t_f) dt_1 dt_2 dt_s dt_f \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_l F_{l \rightarrow mn} D_m D_n}{\alpha_l (\alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_n (t_2 - t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned} \tag{5-12}$$

$$\begin{aligned}
F_{l \rightarrow mn} &\equiv \int_V d\vec{r} \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} v(E) \Sigma_f(\vec{r}, E) \psi_l(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \\
&\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) \Psi_{f,m}^{\dagger}(\vec{r}) \Psi_{f,n}^{\dagger}(\vec{r})
\end{aligned} \tag{5-13}$$

$$\Psi_{f,n}^{\dagger}(\vec{r}) \equiv \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \psi_n^{\dagger}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \tag{5-14}$$

(5-12)式の S_l は(5-4)式で定義しており、 D_m と D_n は(5-6)式で定義している。(5-13)式の $F_{l \rightarrow mn}$ は、単位時間当たり l 次モード成分の中性子が核分裂反応を起こすことにより核分裂連鎖系が分岐し、 m 次モード成分と n 次モード成分の中生子が発生する確率である[5]。(5-14)式の $\Psi_{f,n}^{\dagger}(\vec{r})$ は、位置 \vec{r} の核分裂反応で発生した n 次モード成分の随伴中生子束を表す[5]。

● 同時に投入された中生子により核分裂連鎖系が分岐するケース

Fig. 5-4 に示すように時刻 t_s で体系に外部中生子源による中生子が投入され、そのうち 2 個の中生子が引き起こした核分裂反応によって核分裂連鎖系が分岐し、分岐した核分裂連鎖系に属する中生子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される確率 $P_s(t_1, t_2, t_s) dt_1 dt_2 dt_s$ を求める。

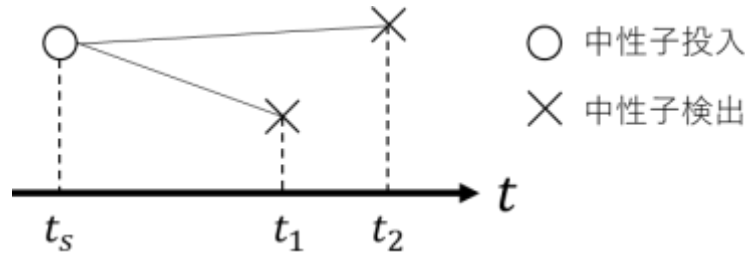


Fig. 5-4 同時に投入された中生子により核分裂連鎖系が分岐した時の 2 時点検出過程

確率 $P_s(t_1, t_2, t_s) dt_1 dt_2 dt_s$ を求めるに当たって、まず時刻 t_s において位置 \vec{r}_s に外部中生子源による中生子が投入される確率を $S(\vec{r}_s) d\vec{r}_s dt_s$ とする。次に、外部中生子源から q 個の中生子が投入される確率を $p_s(q)$ とすると、時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される中生子の先祖の組み合わせは $q(q-1)$ 通りとなるので、異なる 2 時刻で検出される中生子の先祖数の期待値は $\sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q)$ となる。また、外部中生子源によりエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中生子が投入される確率を $(\chi_s(E_s)/4\pi) dE_s d\vec{\Omega}_s$ とする。ここで、グリーン関数を導入すると、時刻 t_s において位置 \vec{r}_s にエネルギー E_s 、方向 $\vec{\Omega}_s$ の中生子が 1 個投入された場合に、その

後の時刻 t_1 における位置 \vec{r}_1 、エネルギー E_1 、方向 $\vec{\Omega}_1$ の中性子数は以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1 | \vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s, t_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_m^\dagger(\vec{r}_s, E_s, \vec{\Omega}_s) e^{-\alpha_m(t_1 - t_s)} \quad (5-15)$$

(5-15)式の α_m は m 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1)$ は α_m に対応する m 次モード成分の固有関数、 $\psi_m^\dagger(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f)$ は α_m に対応する m 次モード成分の随伴固有関数である。位相空間 $(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1, t_1)$ に存在する中性子が検出される確率は、巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ を用いて $v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1)$ と表せる。 $v(E_1)$ はエネルギー E_1 の中性子速度である。同様に、外部中性子源によりエネルギー E'_s 、方向 $\vec{\Omega}'_s$ の中性子が投入される確率を $(\chi_s(E'_s)/4\pi)dE'_s d\vec{\Omega}'_s$ とする。時刻 t_s において位置 \vec{r}_s にエネルギー E'_s 、方向 $\vec{\Omega}'_s$ の中性子が1個投入された場合に、その後の時刻 t_2 における位置 \vec{r}_2 、エネルギー E_2 、方向 $\vec{\Omega}_2$ の中性子数は以下のように表せる。

$$G(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2, t_2 | \vec{r}_s, E'_s, \vec{\Omega}'_s, t_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2) \psi_n^\dagger(\vec{r}_s, E'_s, \vec{\Omega}'_s) e^{-\alpha_n(t_2 - t_s)} \quad (5-16)$$

(5-16)式の α_n は n 次モード成分の即発中性子減衰定数、 $\psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2)$ は α_n に対応する n 次モード成分の固有関数、 $\psi_n^\dagger(\vec{r}_s, E'_s, \vec{\Omega}'_s)$ は α_n に対応する n 次モード成分の随伴固有関数である。位相空間 $(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2, t_2)$ に存在する中性子が検出される確率は、巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\vec{r}_2, E_2)$ を用いて $v(E_2)\Sigma_d(\vec{r}_2, E_2)$ と表せる。 $v(E_2)$ はエネルギー E_2 の中性子速度である。

これまでの説明で定義してきた確率、期待値、グリーン関数を掛け合わせ、全空間・全エネルギー・全方向で積分することにより、確率 $P_s(t_1, t_2, t_s)dt_1 dt_2 dt_s$ を以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & P_s(t_1, t_2, t_s)dt_1 dt_2 dt_s \\ &= \int_V S(\vec{r}_s) d\vec{r}_s dt_s \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)p_s(q) \\ &\times \int_0^\infty dE_s \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \int_0^\infty dE'_s \int_{4\pi} d\vec{\Omega}'_s \frac{\chi_s(E'_s)}{4\pi} \\ &\times \int_V d\vec{r}_1 \int_0^\infty dE_1 \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_1 v(E_1)\Sigma_d(\vec{r}_1, E_1) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(\vec{r}_1, E_1, \vec{\Omega}_1) \psi_m^\dagger(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f) e^{-\alpha_m(t_1 - t_s)} \\ &\times \int_V d\vec{r}_2 \int_0^\infty dE_2 \int_{4\pi} d\vec{\Omega}_2 v(E_2)\Sigma_d(\vec{r}_2, E_2) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\vec{r}_2, E_2, \vec{\Omega}_2) \psi_n^\dagger(\vec{r}_f, E_f, \vec{\Omega}_f) e^{-\alpha_n(t_2 - t_s)} \end{aligned} \quad (5-17)$$

時刻 t_s における中性子の投入は時刻 $-\infty \sim t_1$ の間のいずれかの時刻で発生し得る。従って、(5-17)式において t_s を区間 $(-\infty, t_1)$ で積分すると、中性子の投入によって分岐した核分裂連鎖系に属する中性子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ で検出される確率 $P_s(t_1, t_2)dt_1 dt_2$ を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
P_s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \int_{-\infty}^{t_1} P_s(t_1, t_2, t_s) dt_1 dt_2 dt_s \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{mn} D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned} \tag{5-18}$$

$$S_{mn} \equiv \int_V S(\vec{r}) d\vec{r} \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \Psi_{s,m}^\dagger(\vec{r}) \Psi_{s,n}^\dagger(\vec{r}) \tag{5-19}$$

(5-19)式の S_{mn} は、単位時間当たり外部中性子源の中性子投入により核分裂連鎖系が分岐し、 m 次モード成分と n 次モード成分の中性子が発生する確率である[5]。

5.2.3 Rossi- α 法の理論式

5.2.2項より、全2時点検出確率 $P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ は、独立に中性子が投入されたときの2時点検出確率 $P_u(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ 、核分裂反応によって核分裂連鎖系が分岐した場合の2時点検出確率 $P_f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ 、中性子の投入によって核分裂連鎖系が分岐した場合の2時点検出確率 $P_s(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ を足し合わせることによって(5-20)式のように求められる。

$$\begin{aligned}
&P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
&= P_u(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + P_f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + P_s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
&= \left[P_1(t_1) P_1(t_2) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n(t_2 - t_1)} \right] dt_1 dt_2
\end{aligned} \tag{5-20}$$

ここで、 $\tau = t_2 - t_1$ と置いて(5-20)式を変数変換する。

$$\begin{aligned}
&P_2(t_1, \tau) dt_1 d\tau \\
&= \left[P_1(t_1) P_1(\tau) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n \tau} \right] dt_1 d\tau
\end{aligned} \tag{5-21}$$

(5-21)式を5.2.1項で導出した1時点検出確率 $P_1(t_1) dt_1$ で除することにより、中性子が1個検出された後、検出時間間隔 $\tau \sim \tau + d\tau$ で別の中性子が検出される条件付き確率 $P(\tau) d\tau$ が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
P(\tau) d\tau &= \left[P_1(\tau) + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} D_m D_n}{(\alpha_m + \alpha_n) P_1(t_1)} e^{-\alpha_n \tau} \right] d\tau \\
&= \left[\sum_{n'=0}^{\infty} \frac{S_{n'} D_{n'}}{\alpha_{n'}} + \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} D_m D_n}{(\alpha_m + \alpha_n) \left(\sum_{n''=0}^{\infty} \frac{S_{n''} D_{n''}}{\alpha_{n''}} \right)} e^{-\alpha_n \tau} \right] d\tau \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\alpha_n \tau} + P_u \right] d\tau
\end{aligned} \tag{5-22}$$

(5-22)式の P_n は n 次モード成分の展開係数で以下のように定義した。

$$P_n \equiv \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} D_m D_n}{(\alpha_m + \alpha_n) \left(\sum_{n''=0}^{\infty} \frac{S_{n''} D_{n''}}{\alpha_{n''}} \right)} \quad (5-23)$$

(5-22)式の $\sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\alpha_n \tau}$ は相関項と呼ばれる。また、 P_u は非相関項と呼ばれ、1個目の中性子が検出された後に検出時間間隔 τ で非相関の中性子が検出される頻度であり、(5-24)式より P_u は一定値となることが分かる。

$$P_u \equiv \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{S_{n'} D_{n'}}{\alpha_{n'}} \quad (5-24)$$

(5-22)式が Rossi- α 法の理論式であり、(5-22)式の $P(\tau)$ が Rossi- α 法の頻度分布となる。(5-22)式より、 $P(\tau)$ の理論式は指数関数の足し合わせと定常項で表せることが分かる。実際の Rossi- α 法実験では、原子炉雑音測定結果から中性子検出時間間隔 τ を数え上げ、 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成する。(5-22)式より、 $P(\tau) d\tau$ は1個目の中性子が検出された直後($\tau = 0$)に最大となり、 τ が増加するにつれて指数関数的に減少する。これは、核分裂連鎖系に属する中性子が群を成すことにより、1個目の中性子が検出された時刻付近には中性子が密に存在しているためである。Rossi- α 法では、この指数関数的変化から即発中性子減衰定数 α を推定する。

5.3 即発中性子減衰定数 α の推定手法

本節では、原子炉雑音測定により Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ が得られた場合、即発中性子減衰定数 α をどのように推定するかについて説明する。 α を推定するための手法として、従来法として用いられているフィッティング法と、本論文で新たに適用を試みる DMD による α の推定方法を説明する。5.3.1 項で従来フィッティング法による α の推定方法について説明し、5.3.2 項で DMD による α の推定方法について説明する。

5.3.1 従来フィッティング法による α の推定

第1章 1.1.2 項で説明したように、Rossi- α 法では原子炉雑音測定結果から Fig. 5-5 のように中性子が検出された2時点の検出時間間隔 τ を計算し、検出された全ての中性子の組み合わせについて検出時間間隔 τ を求めて Fig. 5-6 のような頻度分布 $P(\tau)$ を作成する。

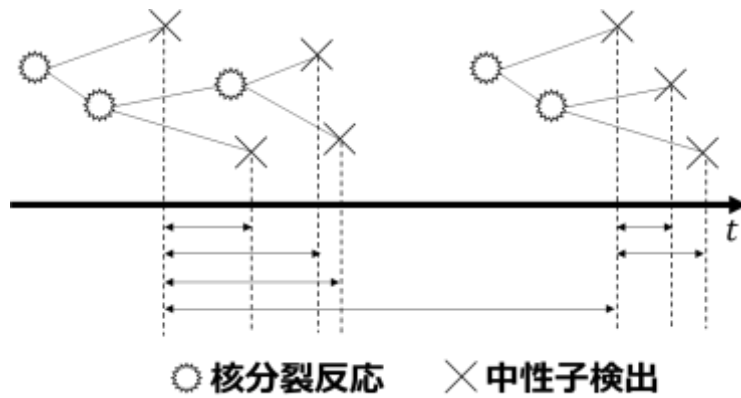


Fig. 5-5 中性子検出時間間隔 τ の概念図(再掲)

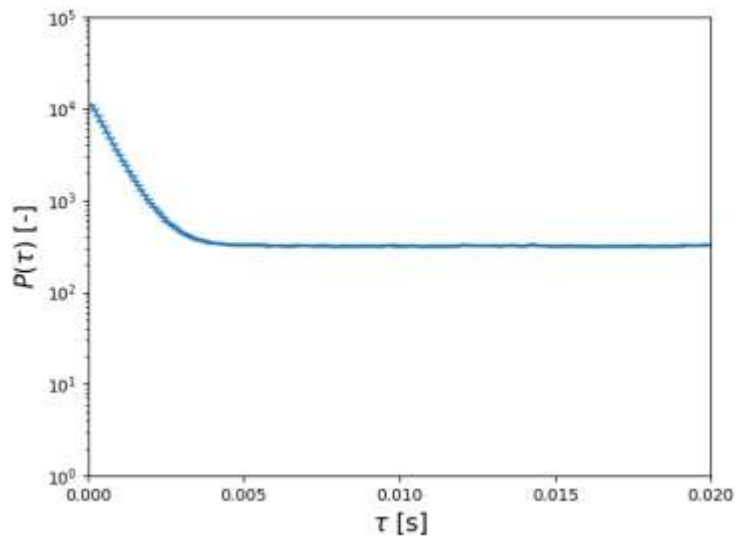


Fig. 5-6 Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の例(再掲)

従来フィッティング法では、Fig. 5-6 のような Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ に対して、以下式で非線形最小二乗フィッティングを行うことにより即発中性子減衰定数 α を得る。

$$P(\tau) = P_0 \exp(-\alpha\tau) + P_u \quad (5-25)$$

(5-25)式の P_0 、 P_u はフィッティングパラメータである。なお、5.4.3 項から 5.4.5 項で従来フィッティング法による α 推定結果を示すが、この時のフィッティングには、プログラミング言語 Python に存在する最小二乗フィッティングを行うためのモジュール「`scipy.optimize.curve_fit` [6]」を用いている。 α のフィッティング誤差は、「`scipy.optimize.curve_fit`」のオプション「`absolute_sigma`」を「True」と設定することで、原子炉雑音測定により得られた $P(\tau)$ の各時間ステップにおける統計誤差の絶対値を用いて評価した。 $P(\tau)$ の各時間ステップにおける統計誤差の評価方法は 5.4.3.1 目で説明する。

(5-22)式で示したように $P(\tau)$ の理論式は指数関数の足し合わせで表現できる。一方、従来

フィッティング法では、(5-25)式のように単一の指数関数でフィッティングを行っている。(5-22)式における $P(\tau)$ の理論式のように複数の指数関数の足し合わせでフィッティングしない理由は、第3章3.3.1項で説明したように、①実際の実験体系でどの次数の高次モード成分まで展開できるか事前に解析することが難しく、②各高次モード成分のフィッティングパラメータの初期値を容易に決定できないことによる。従って、基本モード成分の α を推定するためには、マスキング時間を設定して、 $P(\tau)$ において高次モード成分が残存している時間領域を削除しなければならない。従来フィッティング法では、解析者側が設定するマスキング時間によって α 推定結果が変化するという問題点が存在する。また、複数の検出器を使用した場合、検出器毎に α 推定結果が異なるという問題点も存在する。従って、従来フィッティング法では、数値計算などで予め α の参考値が与えられていない場合、 α の値を一意に決定することが難しい。

5.3.2 DMD による α の推定

5.2節より、Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ の理論式は、パルス中性子法における中性子計数率 $C(t)$ の理論式と同様に、指数関数の足し合わせと定常項で記述できることが明らかとなった。このことより、Rossi- α 法に対しても、第3章3.3.2項で説明したSimmons-King法[2]の場合と同様にDMDを適用することができると考えた。 m 個の検出器を用いて、Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ を時間ステップ幅 $\Delta\tau$ 毎に n 区間測定した場合を考える。検出器数 m と時間ステップ数 n の大小関係は $m < n$ である。原子炉雑音測定により得られた頻度分布 $P(\tau)$ を m 行 n 列の行列 \mathbf{X} として整理する。 $P(\tau)$ における非相関項 P_u を差し引くため、Simmons-King法や面積比法[7],[8]の場合と同様に行列 \mathbf{X} の $(m+1)$ 行目に全時間ステップに渡って1となる定常信号を加える[9]。ここで、行列 \mathbf{X} の1列目から $(n-1)$ 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{1:n-1}$ 、行列 \mathbf{X} の2列目から n 列目を取り出した行列を $\mathbf{X}_{2:n}$ として以下式を仮定する。

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{1:n-1} = \mathbf{X}_{2:n} \quad (5-26)$$

(5-26)式の行列 \mathbf{A} は時間発展行列である。第3章3.3.2項、第4章4.3.2項で説明したように、時間発展行列 \mathbf{A} は以下のように計算することができる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (5-27)$$

(5-27)式の行列 \mathbf{U} と \mathbf{V} はユニタリ行列、 $\mathbf{\Sigma}$ は対角成分に特異値分解における特異値を持つ対角行列である。また、 $*$ は複素共役転置を表す。次に、本研究ではExactDMD[4]を採用しているため、時間発展行列 \mathbf{A} を行列 \mathbf{U} に射影して行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^*\mathbf{X}_{2:n}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \end{aligned} \quad (5-28)$$

計算された行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ を固有値分解することで、 $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ が得られる。 $\tilde{\mathbf{A}}$ は \mathbf{A} の相似変換であるため、 \mathbf{A} と $\tilde{\mathbf{A}}$ の固有値は等しくなる。こうして得られた固有値 λ_i より、以下式によって各モード成分の時定数 ω_i に変換できる。

$$\omega_i = \frac{\ln(\lambda_i)}{\Delta\tau} \quad (5-29)$$

即発中性子減衰定数は負の時定数であるので、各モード成分の即発中性子減衰定数 α_i は以下のように定義される。

$$\alpha_i \equiv -\omega_i \quad (5-30)$$

この DMD による α 推定手法では、基本モード成分の α を正確に推定するため、行列 \mathbf{X} に定常信号を加えることにより非相関項 P_u を差し引いている。定常信号を加えた場合、時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値 λ_{\max} は 1 となり、最大固有値 λ_{\max} に対応するモードは非相関項による定常成分($\omega_{\max} = \ln(\lambda_{\max})/\Delta\tau = 0$)に対応する。従って、基本モード成分の α は、最大固有値 $\lambda_{\max} = 1$ を除いて 2 番目に最大となる固有値によって、以下のように計算される。

$$\alpha = -\frac{\ln(\max(\lambda_{i'}))}{\Delta\tau} \quad \text{where } \lambda_{i'} < \lambda_{\max} \quad (5-31)$$

5.4 KUCA を利用した原子炉雑音測定実験

本節では、2020 年 10 月 19 日(月)から同年 10 月 23 日(金)までの期間に、京都大学臨界集合体実験装置(Kyoto University Critical Assembly: KUCA)にて行った原子炉雑音測定実験とその解析結果について述べる。本実験は、実際に原子炉雑音を測定して Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成し、Rossi- α 法に DMD が適用可能か確認することを目的として実施した。

本節の流れは、まず 5.4.1 項で今回の KUCA 実験における実験体系について説明する。次に、5.4.1 項で説明した実験体系における制御棒価値と余剰反応度の測定結果を 5.4.2 項で説明する。その後、制御棒・安全棒挿入条件などの実験条件を変化させて、様々な実験条件で原子炉雑音測定実験を行った結果を示す。実験体系を臨界状態にした原子炉雑音測定実験を 5.4.3 項、全ての制御棒・安全棒を全挿入した状態の原子炉雑音測定実験を 5.4.4 項、原子炉の運転を停止した状態の原子炉雑音測定実験を 5.4.5 項で示す。

5.4.1 実験体系

本項では、2020 年 10 月 19 日(月)から同年 10 月 23 日(金)にかけて行った KUCA 実験における実験炉心体系、装荷された燃料集合体、使用された検出器・計測機器について纏める。実験炉心体系は 5.4.1.1 目、装荷された燃料集合体は 5.4.1.2 目、使用された検出器・計測機器は 5.4.1.3 目で説明する。

5.4.1.1 実験炉心体系

本実験は、固体減速材を用いた A 架台において実験を行った。本実験ではこの A 架台において、「A1/8”p60EUEU(3)+1/8”Pb40p20EUEU 炉心」という名称の炉心を構築した。この炉心では、中心部に燃料として濃縮ウランを含む「1/8”p60EUEU 燃料集合体」、「1/8”p40EUEU

燃料集合体」、「1/8”p14EUEU 燃料集合体」、「1/8”Pb40p20EUEU 燃料集合体」の 4 種類の燃料集合体を用いており、周辺部に減速材としてポリエチレンを用いている。本実験で使用した A 架台を上面から撮影した写真を Fig. 5-7 に示す。



Fig. 5-7 KUCA の A 架台の写真(2020 年 10 月 20 日撮影)

次に、実験炉心体系の模式図を Fig. 5-8 に示す。Fig. 5-8 の格子位置「そ-11」、「そ-12」、「そ-13」の 3 か所は部分長燃料になっている。「そ-11」と「そ-13」は 1/8”p40EUEU 燃料集合体、「そ-12」は 1/8”p14EUEU 燃料集合体である。これらの格子位置が部分長燃料になっている理由は、炉心の余剰反応度を調整するためである。燃料領域の最外周の外側には、炉の制御を行うための 3 本の制御棒(C1,C2,C3)と 3 本の安全棒(S4,S5,S6)が配置されている。そして、燃料領域の周辺部にはポリエチレン減速材、ポリエチレン反射体、核計装、Am-Be 中性子源が設置されている。第 3 章 3.4.2 項で説明したように、KUCA の A 架台に設置されている核計装は、3 個の核分裂電離箱(Fission Chamber: FC)と 3 個の非補償型電離箱(Uncompensated Ionization Chamber: UIC)の 2 種類がある。FC は低出力領域の計測を受け持ち、UIC は FC よりも高い出力領域を受け持つ[10]。FC は制御棒落下法による制御棒価値の測定に使用した。一方 UIC は、ペリオド法による余剰反応度の測定に使用した。ペリオド法において UIC を使用した理由は、ペリオド法では制御棒引き抜きにより炉心を一時的に超臨界状態にするため、炉心が一時的に高出力となるためである。本実験における原子炉雑音測定には ^3He 検出器を使用した。 $^3\text{Fig. 5-8}$ のグリッド「し-20」に設置されている Am-Be 中性子源は、炉を起動するための中性子源[10]として用いた他、未臨界定常状態を保つための中性子源としても使用した。Fig. 5-8 の中央付近に位置している青枠で囲まれた 3×3 領域は中心架台であり、この領域に配置した 1/8”p60EUEU 燃料集合体 3 本とポリエチレン減速材 6 本は、中心架台の落下により炉心から引き抜くことができる。また、炉の最外周に

は、炉心の耐火性を補強するための黒鉛反射体が設置されている。³He 検出器設置位置、Am-Be 中性子源の挿入条件、中心架台の挿入条件については、原子炉雑音測定実験における実験条件を記述した 5.4.3.1 目、5.4.4.1 目、5.4.5.1 目で示す。

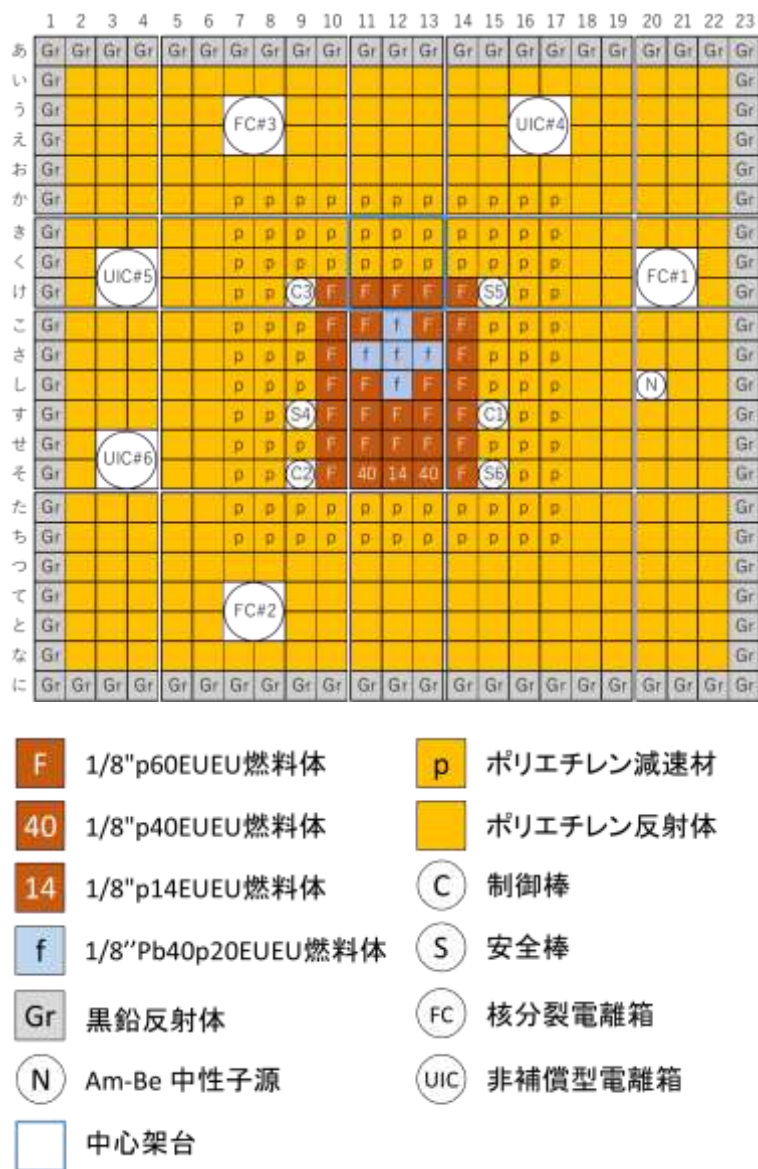


Fig. 5-8 A1/8"p60EUEU(3)+1/8"Pb40p20EUEU 炉心の概略図

5.4.1.2 燃料集合体の構成

5.4.1.1 目で述べたように、本実験で使用した燃料集合体は、燃料として濃縮ウランを含む「1/8"p60EUEU 燃料集合体」、「1/8"p40EUEU 燃料集合体」、「1/8"p14EUEU 燃料集合体」、「1/8"Pb40p20EUEU 燃料集合体」の 4 種類である。本目では、それらの燃料集合体の構成について説明する。

まず、1/8”p60EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 5-9 に示す。Fig. 5-9 に示した 1/8”p60EUEU 燃料集合体では、中心部に 93%濃縮ウラン板(厚さ 1/16”)2 枚とポリエチレン板(厚さ 1/8”)1 枚からなる単位セルを 60 個配置した。ここで、燃料の濃縮ウランは通常の軽水炉で用いられているウラン酸化物ではなく、アルミニウムとの合金である[10],[11]。

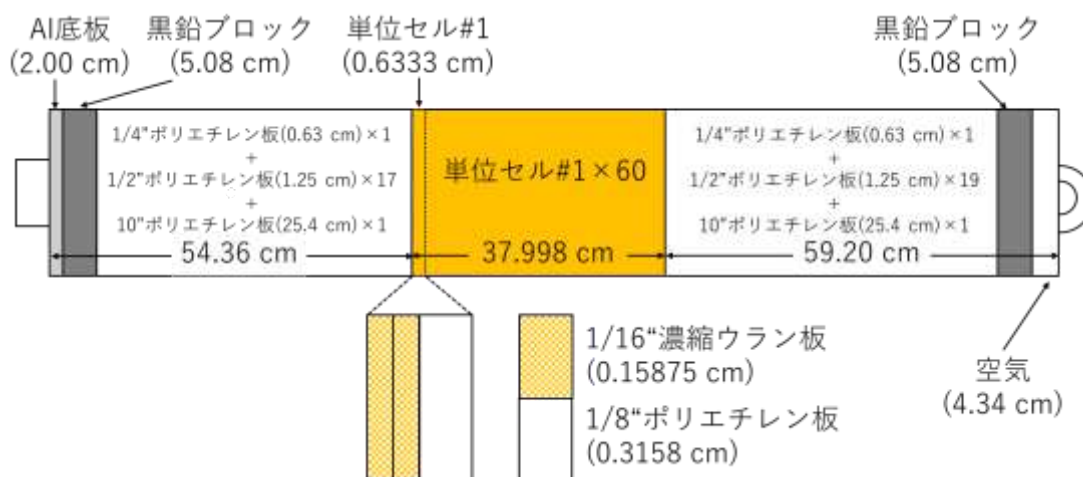


Fig. 5-9 1/8”p60EUEU 燃料集合体の構成図

次に、1/8”p40EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 5-10 に示す。Fig. 5-10 に示された 1/8”p40EUEU 燃料集合体では、中心部に単位セル#1 を 40 個、燃料集合体両端に Al 板(厚さ 1/16”)2 枚とポリエチレン板(厚さ 1/8”)1 枚からなる単位セル#2 を 10 個ずつ配置した。燃料集合体両端に単位セル#2 を 10 個ずつ配置した理由は、1/8”p40EUEU 燃料集合体と 1/8”p60EUEU 燃料集合体の垂直方向の中心位置を一致させるためである。

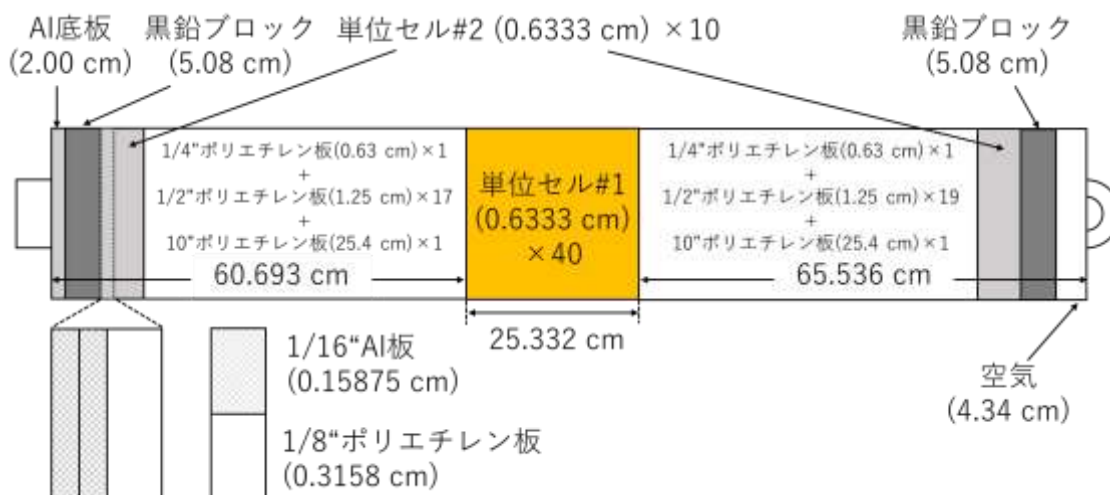


Fig. 5-10 1/8”p40EUEU 燃料集合体の構成図

次に、1/8”p14EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 5-11 に示す。Fig. 5-11 に示された 1/8”p40EUEU 燃料集合体では、中心部に単位セル#1 を 14 個、燃料集合体両端に単位セル#2 を 23 個ずつ配置した。燃料集合体両端に単位セル#2 を 23 個ずつ配置した理由は、1/8”p40EUEU 燃料集合体の場合と同様に、1/8”p14EUEU 燃料集合体と 1/8”p60EUEU 燃料集合体の垂直方向の中心位置を一致させるためである。

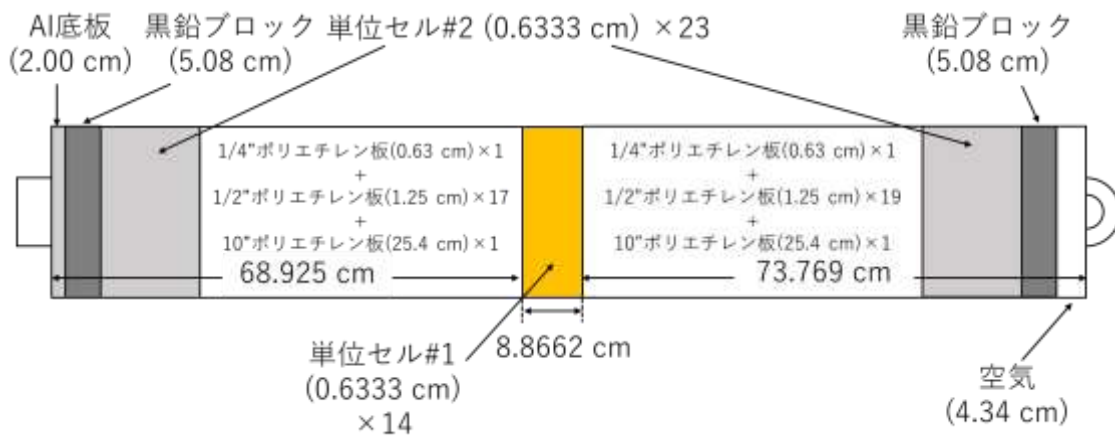


Fig. 5-11 1/8”p14EUEU 燃料集合体構成図

最後に、1/8”Pb40p20EUEU 燃料集合体の構成図を Fig. 5-12 に示す。Fig. 5-12 に示された 1/8”Pb40p20EUEU 燃料集合体は、中心部に 93%濃縮ウラン板(厚さ 1/16”)2 枚と Pb 板(厚さ 1/8”)1 枚からなる単位セル#3 を 40 個使用しており、単位セル#3 で構成された中心部の両側に単位セル#1 を 10 個ずつ配置した。1/8”Pb40p20EUEU 燃料集合体は、Pb 装荷炉心における評価済み核データの妥当性を評価するために、中性子輸送計算コード計算結果との比較に用いる測定データを得ることを目的として装荷された燃料である[12]。

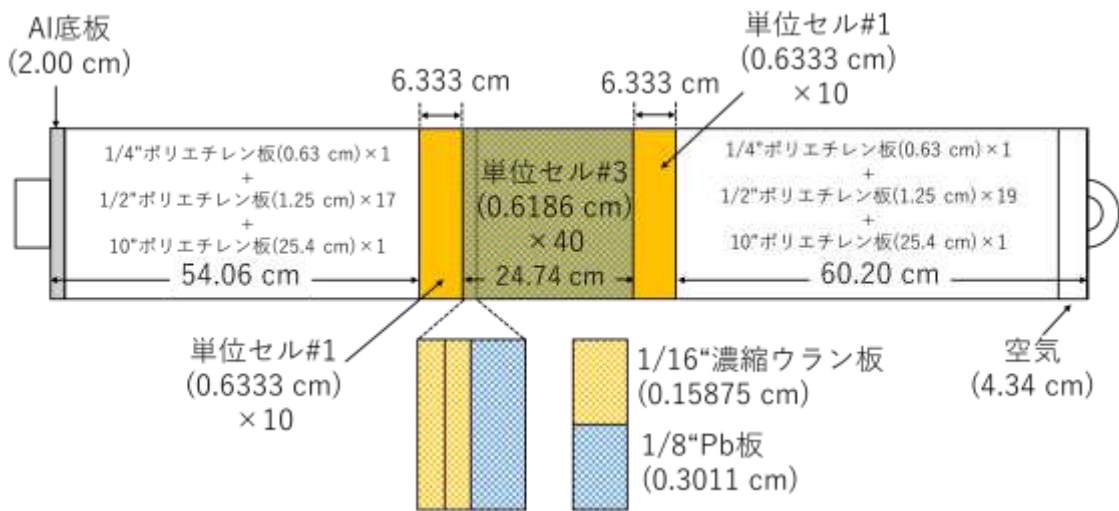


Fig. 5-12 1/8" Pb40p20EUEU 燃料集合体構成図

5.4.1.3 使用した検出器と計測機器

5.4.1.1 目で述べたように、本実験における原子炉雑音測定には ^3He 検出器を用いた。 He 検出器は、検出器内部の ^3He ガスと中性子による $^3\text{He}(n,p)^3\text{H}$ 反応を利用する検出器である [13]。本実験では、合計 4 つの ^3He 検出器($^3\text{He}\#1, \#2, \#3, \#4$)を使用し、それぞれ炉心の減速材領域に設置した。実験で使用した ^3He 検出器の幾何形状を Fig. 5-13 に示す。Fig. 5-13 において、灰色で示した部分が ^3He 検出器の有感領域となっている。

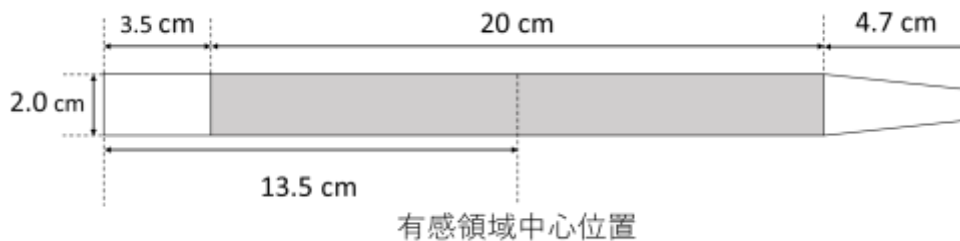


Fig. 5-13 使用した ^3He 検出器の幾何形状

^3He 検出器は、検出器装荷用の穴あきポリエチレンブロックで構成された減速体内に装荷した。Fig. 5-14 に ^3He 検出器を装荷した減速体の構成図を示す。Fig. 5-14 に示した ^3He 検出器装荷用減速体では、アルミニウム底板と黒鉛ブロックを 1 つずつ最下部に設置し、燃料集合体の中心位置と ^3He 検出器の有感領域中心位置が概ね一致するように 1/2" ポリエチレン板 5 枚と 10" のポリエチレンブロック 2 本を装荷した。さらに、その上に直径 2.9 cm の穴が開いている検出器装荷用の穴あきポリエチレンブロック (16.0 cm) を 5 個装荷した。

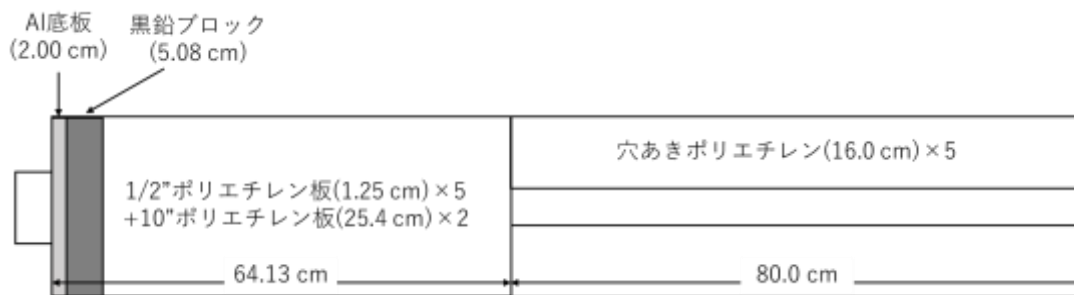


Fig. 5-14 ³He 検出器装荷用減速体の構成図

本実験では各検出器の検出器信号を記録する計測機器として、ANSeeN 製 MCA(Multi Channel Analyzer)を用いた。本実験の計測システムの概略図を Fig. 5-15 に示す。それぞれの計測機器には複数のチャンネルがあり、各検出器の信号はそれぞれに対応する計測機器のチャンネルに記録される。各検出器と計測機器のチャンネル対応を Table. 5-1 に示す。

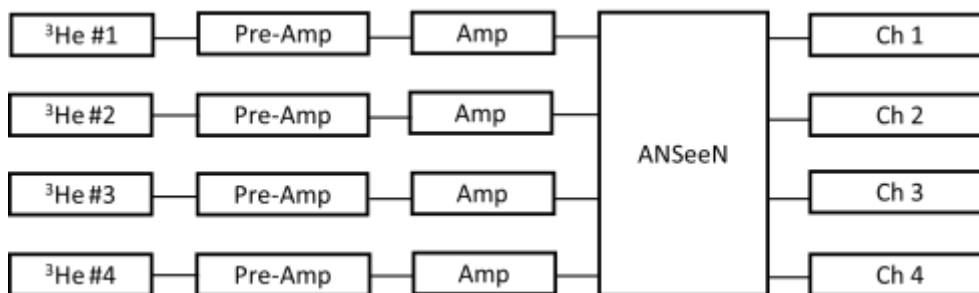


Fig. 5-15 ³He 検出器の測定システム

Table. 5-1 各検出器と計測機器のチャンネル対応

計測機器	入力 チャンネル	接続した信号
ANSeeN	1	³ He#1
	2	³ He#2
	3	³ He#3
	4	³ He#4

5.4.2 制御棒価値と余剰反応度の測定

本項では、5.4.1 項で示した実験体系の制御棒価値と余剰反応度の測定結果について述べる。本実験では、制御棒価値の測定には制御棒落下法[10],[14]、余剰反応度の測定にはペリオド法[10],[14]を用いた。制御棒落下法による制御棒価値の測定結果を 5.4.2.1 目、ペリオド法による余剰反応度の測定結果を 5.4.2.2 目に示す。

5.4.2.1 制御棒落下法による制御棒価値測定

第3章 3.4.3.1 目で説明したように、制御棒落下法とは、臨界状態における中性子計数率 $n(0)$ を測定した後に制御棒価値測定対象の制御棒を落下させ、一定時間経過後に中性子計数率の積分値 $\int_0^\infty n(t)dt$ を測定して、以下式によりドル単位の制御棒価値 $(-\rho/\beta_{\text{eff}})$ を算出する手法である。

$$\frac{-\rho}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n(0) \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{\lambda_i}}{\int_0^\infty n(t)dt} \quad (5-32)$$

(5-32)式の α_i は i 群の遅発中性子の相対収率、 λ_i は i 群の遅発中性子先行核の崩壊定数(1/s)である。

制御棒落下法の測定では核分裂電離箱 FC#1~#3 を使用した。実験では、まず測定対象の制御棒を全引き抜きにした状態で、残りの制御棒の挿入量を調節して体系を臨界状態に保った。この時、3本の安全棒は全て全引き抜き状態であった。臨界状態において10秒間の中性子計数測定を5回繰り返し、5回の平均値を臨界状態における中性子計数率 $n(0)$ とした。その後、測定対象の制御棒を落下させ、中性子計数率の積分値 $\int_0^\infty n(t)dt$ を測定した。積分値 $\int_0^\infty n(t)dt$ を測定するための積分時間 T (s) は、KUCAにおいて中性子計数率が2 cps以下になると発せられるアラートの時間を目安に決定した[15]。

制御棒価値測定時における初期状態の制御棒・安全棒位置を Table. 5-2 に示す。また、各制御棒における、制御棒落下前の5回の10秒間測定結果と、制御棒落下後の中性子計数率の積分値測定結果を Table. 5-3 から Table. 5-5 に示す。Table. 5-3 から Table. 5-5 には、各検出器の「重み」も記載している。「重み」は、落下させた制御棒と各検出器の位置関係を考慮し、制御棒価値の計算に使用する検出器を1、制御棒価値の計算に使用しない検出器を0としたパラメータである。

Table. 5-2 制御棒価値測定時の初期制御棒・安全棒位置

制御棒・安全棒	C1 測定時	C2 測定時	C3 測定時
C1 (mm)	1201.13	727.03	727.22
C2 (mm)	1201.16	1201.17	1201.16
C3 (mm)	614.62	1201.36	1201.38
S4 (mm)	1200	1200	1200
S5 (mm)	1200	1200	1200
S6 (mm)	1200	1200	1200

Table. 5-3 C1 制御棒価値測定時の計測結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	19490	49985	14252
2	19494	50003	14188
3	19412	49561	14139
4	19334	49726	14156
5	19563	50195	14186
平均値	19459	49894	14184
積分値 (T = 500 s)	20402	54139	16038
重み	0	1	1

(2020年10月21日測定)

Table. 5-4 C2 制御棒価値測定時の計測結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	16508	42524	13591
2	16525	42836	13682
3	16486	42447	13442
4	16566	42701	13540
5	16374	42427	13464
平均値	16492	42587	13544
積分値 (T = 600 s)	39994	85320	32342
重み	1	0	1

(2020年10月21日測定)

Table. 5-5 C3 制御棒価値測定時の計測結果

測定回数	FC#1	FC#2	FC#3
1	16903	43002	13546
2	16689	42703	13486
3	16514	42770	13702
4	17092	43375	13737
5	16852	43334	13548
平均値	16810	43037	13604
積分値 (T = 600 s)	52943	136736	36861
重み	1	1	0

(2020年10月21日測定)

次に、(5-32)式から計算した各制御棒のドル単位の制御棒価値を Table. 5-6 に示す。制御棒価値の計算には、第3章 3.4.3.1 目で示した **Keepin** の遅発中性子パラメータ[16]を用いた。Table. 5-6 における制御棒価値の不確かさは、遅発中性子パラメータ(a_i, λ_i)については正規分布による摂動、中性子計数測定結果についてはポアソン分布による摂動を加えてランダムサンプリング法によって評価した。 a_i を摂動させた際は、摂動後の a_i の総和が1となるように規格化した。このランダムサンプリング法におけるサンプリング数 N は、ランダムサンプリング法による不確かさの相対統計誤差が1%以下となるように $N=10,000$ とした[17]。なお、3本の安全棒の制御棒価値は、左右対称位置に存在する制御棒の制御棒価値に等しいと仮定した。

Table. 5-6 落下法による制御棒価値測定結果

制御棒・安全棒	制御棒価値 (\$)
制御棒 C1、安全棒 S4	1.179 ± 0.040
制御棒 C2、安全棒 S6	0.542 ± 0.019
制御棒 C3、安全棒 S5	0.413 ± 0.014

5.4.2.2 ペリオド法による余剰反応度測定

第3章 3.4.3.2 目で説明したように、ペリオド法とは、臨界状態の体系にステップ状に反応度 ρ を添加し、原子炉の出力が e 倍または $1/e$ 倍になる周期であるペリオド T を測定することにより、以下式のように添加された反応度をドル単位で算出する方法である。

$$\frac{\rho}{\beta_{\text{eff}}} = \sum_i^6 \frac{a_i}{1 + \lambda_i T} \quad (5-33)$$

(5-33)式の a_i は*i*群の遅発中性子の相対収率、 λ_i は*i*群の遅発中性子先行核の崩壊定数(1/s)である。

本実験のペリオド法では、始めに制御棒C1,C2と安全棒3本を全引き抜きの状態にして、制御棒C3の挿入量を調節することで炉心を臨界状態にした。臨界状態の制御棒・安全棒位置をTable. 5-7に示す。

Table. 5-7 臨界状態時の制御棒・安全棒位置 (1回目)

制御棒・安全棒	位置 (mm)
C1	1201.13
C2	1201.15
C3	613.34
S4	1200
S5	1200
S6	1200

炉心を臨界状態にした後、C3を613.34 mm → 684.63 mmだけ引き抜き、UIC#5で測定された出力が①25%→50%、②30%→60%、③35%→70%、④40%→80%と倍になるまでの倍加時間 T_d をストップウォッチで計測した。倍加時間 T_d とペリオド T の関係は以下の通りである。

$$T = \frac{T_d}{\ln 2} \quad (5-34)$$

この時に測定した倍加時間をTable. 5-8に示す。

Table. 5-8 C3 : 613.34 mm → 684.63 mm 引き抜き時の倍加時間測定結果

出力変化	倍加時間 [s]
25%→50%	65.13
30%→60%	66.85
35%→70%	65.40
40%→80%	64.06
平均 [s]	65.44

④40%→80%の倍加時間を測定した後、制御棒C1を挿入して再び炉心を臨界状態にした。この時の制御棒・安全棒位置をTable. 5-9に示す。

Table. 5-9 臨界状態時の制御棒・安全棒位置 (2回目)

制御棒・安全棒	位置 (mm)
C1	776.22
C2	1201.15
C3	684.63
S4	1200
S5	1200
S6	1200

C1によって炉心を臨界状態にした後、C3を684.63 mm → 1200 mmまで全引き抜きし、出力が①25%→50%、②30%→60%、③35%→70%、④40%→80%になるまでの倍加時間 T_d を再度ストップウォッチで計測した。この時に測定した倍加時間をTable. 5-10に示す。

Table. 5-10 C3 : 684.63 mm → 1200 mm 引き抜き時の倍加時間測定結果

出力変化	倍加時間 (s)
25%→50%	45.58
30%→60%	44.88
35%→70%	45.00
40%→80%	45.15
平均値	45.15

今回のペリオド法では、制御棒C3を2回に分けて全引き抜きした。この1回目と2回目の引き抜きで加えられた正の反応度の合計が余剰反応度に相当する。Table. 5-8とTable. 5-10の倍加時間測定結果から、ペリオド T とドル単位の反応度 $(\rho/\beta_{\text{eff}})$ を推定した結果をTable. 5-11に示す。Table. 5-11のペリオド T とその不確かさは、①～④の条件で測定した4つの倍加時間の平均値と標準誤差から算出した。ドル単位の反応度 $(\rho/\beta_{\text{eff}})$ は推定したペリオド T から(5-33)式により推定した。 $(\rho/\beta_{\text{eff}})$ の計算に使用した a_i と λ_i の値は、第3章3.4.3.1目で示したKeepinの遅発中性子パラメータを用いた。 $(\rho/\beta_{\text{eff}})$ の不確かさは、ペリオド T と遅発中性子パラメータ (a_i, λ_i) に対して正規分布による摂動をそれぞれ加えて、ランダムサンプリング法により評価した。 a_i を摂動させた際は、摂動後の a_i の総和が1となるように規格化している。このランダムサンプリング法におけるサンプリング数 N は、制御棒落下法と同様に $N=10,000$ とした。

Table. 5-11 ペリオドと余剰反応度の推定結果

	ペリオド T (s)	ρ/β_{eff} (\$)
C3 : 613.34 mm → 684.63 mm	94.41 ± 1.01	0.104 ± 0.003
C3 : 684.63 mm → 1200 mm	65.14 ± 0.22	0.136 ± 0.004
余剰反応度		0.240 ± 0.006

5.4.3 臨界体系における原子炉雑音測定実験

本項では、5.4.1 項で説明した実験体系を臨界にした状態で、原子炉雑音を測定した結果について示す。体系が臨界に近づくほど基本モード成分の減衰は遅くなり、基本モード成分と高次モード成分を分離することが容易となる。臨界体系における原子炉雑音測定は、まずは基本モード成分を分離し易い体系において、DMD により確実に基本モード成分の α を推定可能か確認することを目的として実施した。臨界状態における実験を原子炉雑音測定実験で行う理由としては、パルス中性子源を用いる Simmons-King 法と面積比法では体系を臨界状態にすることができないためである。

本項の流れは、まず 5.4.3.1 目で臨界状態における制御棒・安全棒位置などの実験条件と、臨界状態の原子炉雑音測定結果から Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成した結果を示す。次に 5.4.3.2 目で、原子炉雑音測定により得た $P(\tau)$ に対して DMD と従来フィッティング法を適用し、基本モード成分の α を推定した結果を示す。

5.4.3.1 実験条件・実験結果

実験炉心を臨界にした時の体系を Fig. 5-16 に示し、Fig. 5-16 の臨界体系における実験条件を Table. 5-12 に示す。この原子炉雑音測定実験では、制御棒 C1 以外の制御棒・安全棒は全て全引き抜き状態であり、制御棒 C1 の挿入量を調節して炉心を臨界状態にした。この時、中心架台は炉心から引き抜かれておらず、Am-Be 中性子源は炉心から引き抜かれている。なお、この実験では炉心を臨界状態にしているため、未臨界度($-\rho$)は 0 となる。原子炉雑音の測定には、減速材領域に設置した 4 つの ^3He 検出器(^3He #1~#4)を使用した。

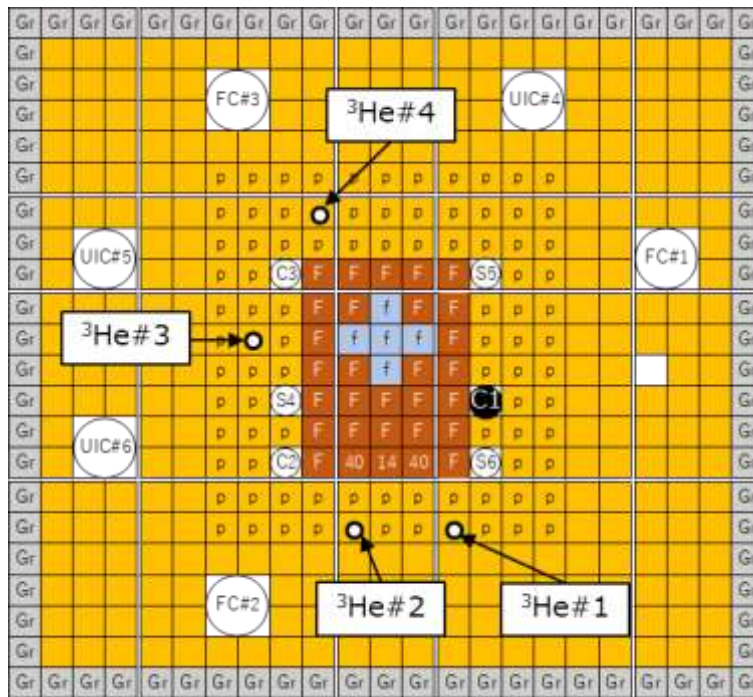


Fig. 5-16 臨界体系（黒丸・白字の制御棒は挿入）

Table. 5-12 臨界体系における実験条件

制御棒	C1	725.67 mm
	C2	1201.18 mm
	C3	1201.39 mm
安全棒	S4	1200 mm
	S5	1200 mm
	S6	1200 mm
中心架台	上限	
Am-Be 中性子源	引き抜き	
未臨界度 ($-\rho$)	0 \$	

ここで、Fig. 5-16 に示した臨界体系の一点炉動特性パラメータの計算結果について記載する。一点炉動特性パラメータの計算には、連続エネルギーモンテカルロ計算コード MCNP6.2[18]を使用し、IFP(Iterated Fission Probability)を評価することで一点炉動特性パラメータを計算した[19],[20]。MCNP6.2 の計算条件を Table. 5-13、MCNP6.2 による一点炉動特性パラメータの計算結果を Table. 5-14 に示す。Table. 5-14 に示した β_{eff} , Λ , k_{eff} の不確かさは、MCNP6.2 のモンテカルロ計算における統計誤差である。即発中性子寿命 ℓ は、 Λ と k_{eff} を掛け合わせることで計算し、 ℓ の不確かさは誤差伝播則により計算した。また、Table. 5-14 には、 α の参考値 β_{eff}/ℓ の値も示している。第 3 章 3.4.4 項で示したように体系が未臨界である場

合、 α の参考値は $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ となる。一方、今回は臨界体系なので $(-\rho) = 0$ であり、臨界体系のとき $\ell \approx \Lambda$ であることから、 α の参考値を β_{eff}/ℓ とした。 α の参考値 β_{eff}/ℓ の不確かさも誤差伝播則により計算した。

Table. 5-13 MCNP6.2 の計算条件

核データ	ENDF/VII.1 [21]
ヒストリー数	200000
バッチ数	1100
捨てバッチ数	100
blocksize	5

Table. 5-14 MCNP6.2 による一点炉動特性パラメータ

実効遅発中性子割合 β_{eff} (-)	0.00808 ± 0.00004
中性子生成時間 Λ (μs)	33.11 ± 0.03
実効増倍率 k_{eff} (-)	1.00076 ± 0.00007
即発中性子寿命 $\ell (= \Lambda \times k_{\text{eff}})$ (μs)	33.13 ± 0.03
α の参考値 β_{eff}/ℓ (1/s)	244 ± 1

今回実施した実験では、臨界状態における原子炉雑音を1時間測定し、この1時間の炉雑音測定結果から中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成した。今回の解析では、頻度分布 $P(\tau)$ を作成する際の区間幅 $\Delta\tau$ は0.0001sとした。また、 $P(\tau)$ を作成する際、中性子検出時間間隔 τ の上限 τ_{max} を設定し、 τ_{max} を超える長さの時間間隔は数え上げないこととした。これは、即発中性子減衰定数 α の推定において、 $P(\tau)$ における相関項が十分に減衰する時間間隔よりも長い時間間隔を数え上げる必要がないからである[22]。今回の解析では、 $\tau_{\text{max}} = 0.02$ sとした。今回の測定における $P(\tau)$ の作成方法としては、まず測定開始から1番目に検出された中性子を起点として、 $\Delta\tau = 0.0001$ sの区間幅で $\tau_{\text{max}} = 0.02$ sを超えない中性子検出時間間隔 τ を数え上げて頻度分布を作成する。次に、測定開始から2番目に検出された中性子を起点として同様に頻度分布を作成する。この処理を1時間内に検出された全ての中性子を起点として行い、複数の頻度分布を作成する。このようにして得られた複数の頻度分布の平均を最終的な Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ とし、複数の頻度分布の標準誤差を $P(\tau)$ の統計誤差とした。標準誤差は中心極限定理に基づいて算出した。Fig. 5-17に4つの ^3He 検出器における原子炉雑音測定結果から作成した Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を示す。Fig. 5-17を見ると、臨界体系では中性子が常に一定のペースで検出され続けるため、 $P(\tau)$ は検出時間間隔 τ の値に依らずほぼ一定の値となっているように見え、相関項と非相関項を明確に区別できない頻度分布となっている。

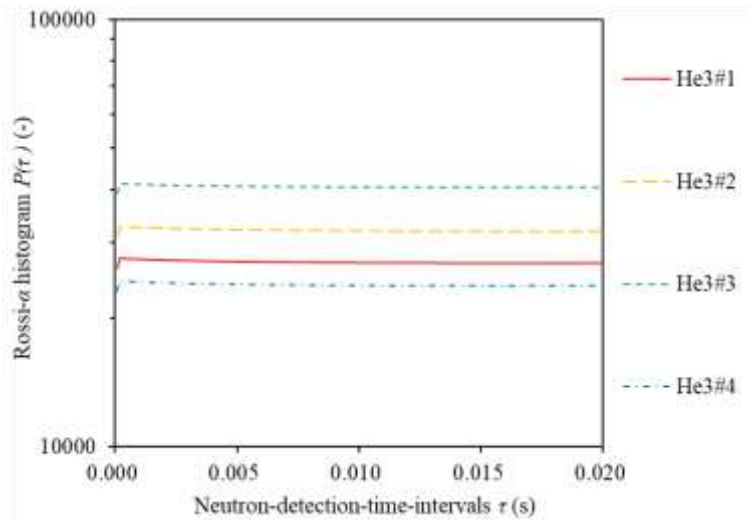


Fig. 5-17 臨界体系における Rossi- α 法頻度分布

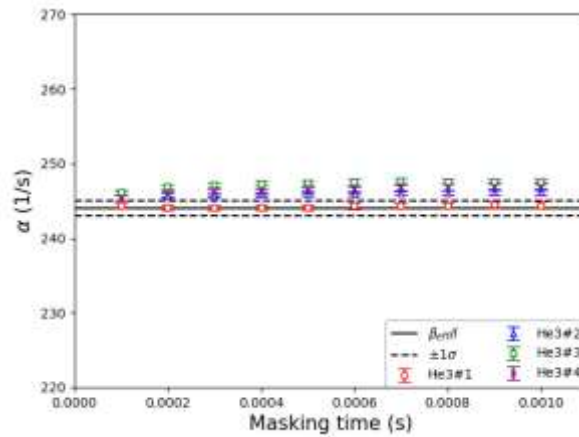
5.4.3.2 DMD と従来フィッティング法による解析

Fig. 5-17 に示した Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ に対して、5.3 節にて説明した方法で従来フィッティング法と DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を推定した結果を Fig. 5-18 に示す。

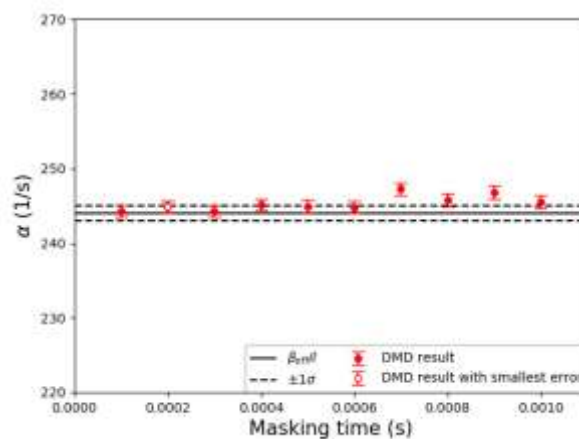
まず Fig. 5-18 (a) の従来フィッティング法による α 推定結果を見ると、いずれの検出器結果もマスクング時間に対する α 推定結果がほぼ一定となっており、高次モード成分による参考値との系統的な差異(バイアス)がほとんど見られない。この理由として、①今回の原子炉雑音測定では体系が臨界状態であり、高次モード成分に比べて基本モード成分の減衰が非常に遅かったため、体系内には基本モード成分しか存在していなかったこと、あるいは、②高次モード成分の励起が小さい位置に検出器が配置されており、高次モード成分の中性子束が検出され難かったことが考えられる。各検出器の α 推定結果と α の参考値 β_{eff}/ℓ を比較すると、 $^3\text{He}\#1$ 以外の推定結果は参考値の 1σ 範囲よりも過大評価されており、検出器毎に異なる α の値が推定されている。従って、今回のように参考値が事前に与えられていない場合、どの検出器結果を採用するか決定し難いが、第 3 章 3.4.4.2 項で示した従来フィッティング法適用結果と比較すると、検出器毎の α 推定結果のばらつきは低減されている。これは、第 3 章 3.4 節のパルス中性子法実験に比べて、今回の原子炉雑音測定実験では検出器の数が少なくなっており、いずれの ^3He 検出器も減速材領域に設置されているため、検出器の位置依存性が小さくなっているためである。以上より、今回の従来フィッティング法適用結果では、検出器毎に α 推定結果のばらつきが多少見られるが、高次モード成分の影響を低減した形で基本モード成分の α を推定することができたとと言える。

一方、Fig. 5-18 (b) を見ると、DMD で時系列データを複数のモードに分解して基本モード成分を抽出した結果、推定された α はマスクング時間に対して 244~247 (1/s) の範囲で推移し、参考値 β_{eff}/ℓ と統計誤差の範囲で概ね一致した。DMD では、従来フィッティング法とは異

なり複数の検出器結果から一つの α の値を推定することができ、尚且つマスクング時間に対する α 推定結果が概ね一定になっていることから、DMDで α を一意に決定する際は α の統計誤差が最小となるマスクング時間を選べば良い。Fig. 5-18 (b)において α の統計誤差が最小となるマスクング時間は0.0002 sであり、マスクング時間0.0002 sにおける α 推定結果は 245 ± 1 (1/s)であった。以上より、DMDによって臨界体系における基本モード成分の α を推定可能であることを確認し、 β_{eff}/ℓ という動特性パラメータを実験により直接実測することができた。但し、今回は臨界体系を対象とした原子炉雑音測定であったため、DMDと従来フィッティング法の両手法において、高次モード成分の影響を除去した形で基本モード成分の α を推定することが出来ている。従って、DMDの利点がより明確になるのは、基本モード成分と高次モード成分の分離が難しくなる、未臨界が深い体系だと考えられる。よって、以降の5.4.4項と5.4.5項では、深い未臨界体系における原子炉雑音測定実験について説明する。



(a) 従来フィッティング法



(b) DMD

Fig. 5-18 臨界体系における α 推定結果

5.4.4 全制御棒・安全棒挿入体系における原子炉雑音測定実験

本項では、5.4.1 項で説明した実験体系において、全ての制御棒と安全棒を全挿入にした状態で、原子炉雑音を測定した結果について示す。体系の未臨界度が深くなるほど基本モード成分の減衰が速くなり、基本モード成分と高次モード成分を分離し難くなる。本実験は、①深い未臨界体系において DMD により基本モード成分の α を推定可能か、②従来フィッティング法と比較した場合に DMD の利点を明確に示すことができるか確認することを目的として実施した。

本項の流れは、まず 5.4.4.1 目で全制御棒・安全棒挿入状態における中心架台・Am-Be 中性子源挿入条件といった実験条件と、全制御棒・安全棒挿入状態の原子炉雑音測定結果から Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成した結果を示す。次に 5.4.4.2 目で、原子炉雑音測定により得た $P(\tau)$ に対して DMD と従来フィッティング法を適用し、基本モード成分の α を推定した結果を示す。

5.4.4.1 実験条件・実験結果

本実験では、全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系を ARI (All Rods In)と呼称する。ARI の体系図を Fig. 5-19 に示し、ARI における実験条件を Table. 5-15 に示す。Fig. 5-19 の ^3He 検出器位置は、Fig. 5-16 の臨界体系と同様である。Fig. 5-19 の ARI 体系において、中心架台は炉心から引き抜かれておらず、Am-Be 中性子源も炉心に挿入されている。今回の測定では、測定される中性子計数率を大きくして中性子計数率の統計誤差を低減するために、Am-Be 中性子源を挿入して炉心を未臨界定常状態に保ち、原子炉雑音を測定した。なお、Table. 5-15 で示した未臨界度($-\rho$)は、Table. 5-6 と Table. 5-11 で示した制御棒価値と余剰反応度から算出した。

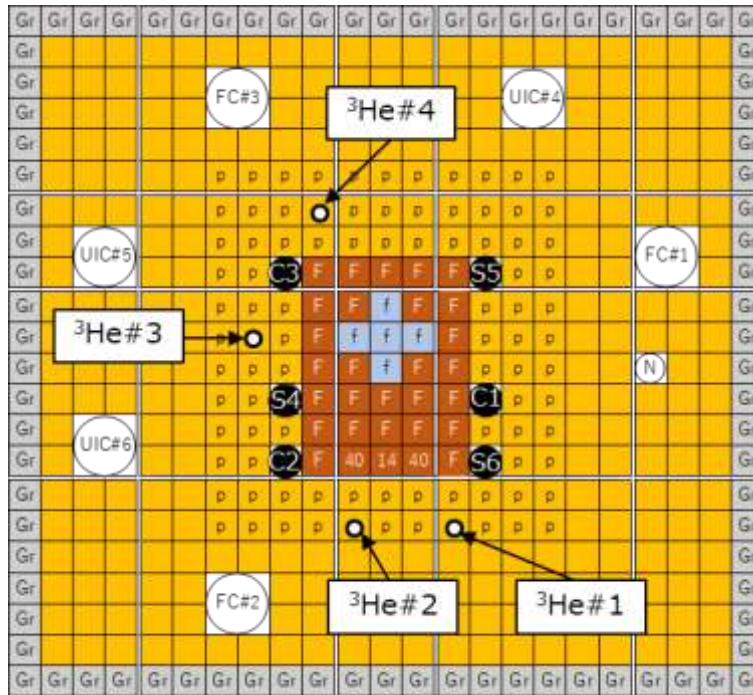


Fig. 5-19 ARI 体系（黒丸・白字の制御棒・安全棒は全挿入）

Table. 5-15 ARI 体系における実験条件

制御棒	C1	0 mm
	C2	0 mm
	C3	0 mm
安全棒	S4	0 mm
	S5	0 mm
	S6	0 mm
中心架台	上限	
Am-Be 中性子源	挿入	
未臨界度 ($-\rho$)	$4.027 \pm 0.133 \text{ \$}$	

ここで、MCNP6.2 により計算した、ARI 体系における一点炉動特性パラメータを Table. 5-16 に示す。MCNP6.2 の計算条件は Table. 5-13 と同じである。Table. 5-16 には、制御棒価値・余剰反応度の測定結果から算出した未臨界度($-\rho$)と、MCNP6.2 による β_{eff} と Λ を用いて計算した $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の値も示している。 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の不確かさについては、各パラメータに対して正規分布による摂動を加え、ランダムサンプリング法によって評価した。このランダムサンプリング法におけるサンプリング数は 10,000 である。5.4.4.2 目の解析では、Table. 5-16 に示された $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ の値を即発中性子減衰定数 α の参考値として用いている。

Table. 5-16 MCNP6.2 による一点炉動特性パラメータと $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$

実効遅発中性子割合 β_{eff} (-)	0.00807 ± 0.00004
中性子生成時間 Λ (μs)	27.28 ± 0.03
α の参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ (1/s)	$1,487 \pm 39$

今回実施した実験では、ARIにおける原子炉雑音を10,000秒間測定し、この10,000秒間の炉雑音測定結果から中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成した。臨界体系における解析と同様に、頻度分布 $P(\tau)$ を作成する際の区間幅 $\Delta\tau$ は0.0001sとし、中性子検出時間間隔 τ の上限 τ_{max} は0.02sとした。Fig. 5-20に4つの ^3He 検出器における原子炉雑音測定結果から作成したRossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を示す。Fig. 5-20は未臨界体系における $P(\tau)$ であるため、Fig. 5-17の臨界体系における $P(\tau)$ と異なり、 $P(\tau)$ の理論式における相関項による指数関数的減衰と、非相関項による定常成分が明確に観測することができる。

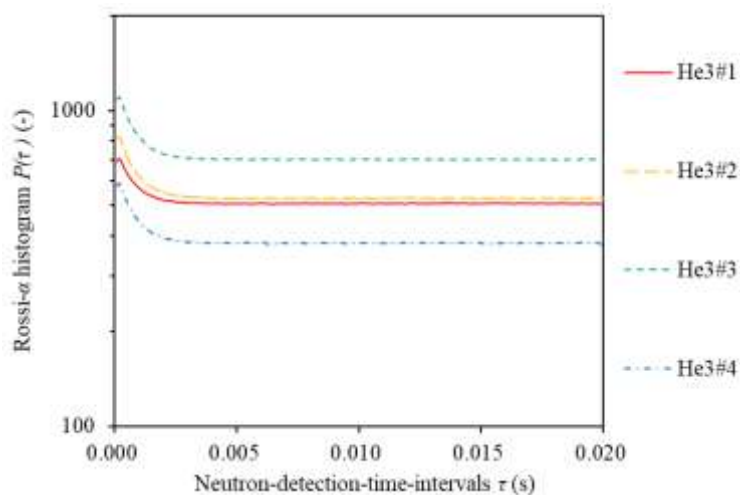


Fig. 5-20 ARIにおけるRossi- α 法頻度分布

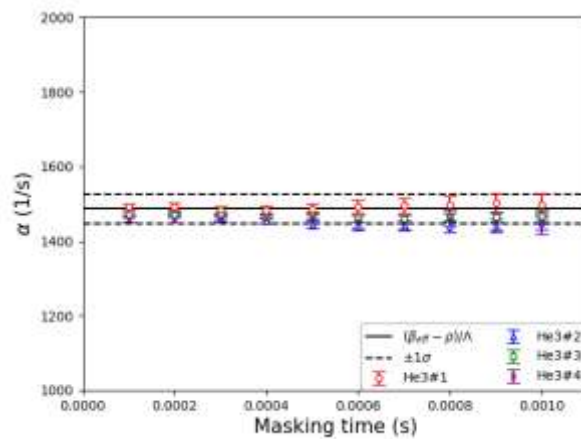
5.4.4.2 DMDと従来フィッティング法による解析

Fig. 5-20に示したRossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ に対して、従来フィッティング法とDMDにより基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を推定した結果をFig. 5-21に示す。

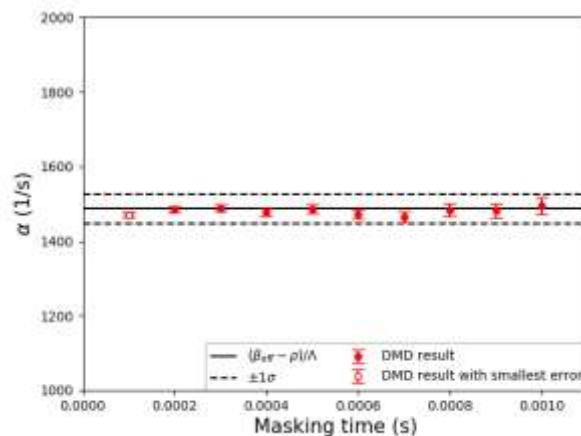
まずFig. 5-21(a)の従来フィッティング法結果を見ると、Fig. 5-18(a)の臨界体系における推定結果と同様に、いずれの検出器結果もマスキング時間に対する α 推定結果がほぼ一定となっている。全ての制御棒・安全棒を全挿入した深い未臨界体系の測定においても、高次モード成分のバイアスがそれほど見られないことから、本実験の検出器位置は高次モード成分の励起が小さく、高次モード成分の中性子束が検出され難い位置に配置されていたと考えられる。検出器毎の α 推定結果のばらつきを見ると、Fig. 5-18(a)で示した臨界体系における α 推定結果と比較して、Fig. 5-21(a)における検出器毎の α 推定結果のばらつきの方が大き

くなっているが、いずれの検出器の α 推定結果も参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ と統計誤差の範囲で一致している。このことから、Fig. 5-21 (a)の結果についても、第3章 3.4.4.2項で示したパルス中性子法に対する従来フィッティング法適用結果に比べて、検出器毎の α 推定結果のばらつきは低減されている。今回の実験体系では全ての制御棒・安全棒を同様に全挿入しているので、制御棒・安全棒の挿入が検出器の位置依存性には寄与しなかったと考えられる。

Fig. 5-18 (b)の DMD 適用結果を見ると、これまでの DMD 適用結果と同様に、マスクング時間に対して概ね一定の α 推定結果が得られ、いずれのマスクング時間においても参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ と統計誤差の範囲で一致している。今回の DMD 適用結果において α の統計誤差が最小となるマスクング時間は 0.0001 s であり、マスクング時間 0.0001 s における α の値は $1,470 \pm 7$ (1/s) となった。よって、深い未臨界体系における Rossi- α 法に対しても DMD が適用可能であることを確認し、DMD により一意に基本モード成分の α が得られることが分かった。



(a) 従来フィッティング法



(b) DMD

Fig. 5-21 ARI における α 推定結果

ここで、Fig. 5-21 (a)における検出器毎の α 推定結果のばらつきを、4つの検出器の α 推定結果の標準偏差と定義する。検出器毎の α 推定結果のばらつきは、マスクング時間 0.0003 s において最小となり、4つの検出器の α 推定結果の標準偏差は約 8 (1/s)となった。マスクング時間 0.0003 s における DMD による α 推定結果の統計誤差は約 9 (1/s)であることから、検出器毎のばらつきと DMD 統計誤差は同程度の値となった。また、検出器毎のばらつきが最大となるマスクング時間で比較すると、マスクング時間 0.001 s で検出器毎のばらつきは約 20 (1/s)、DMD 統計誤差は約 23 (1/s)となり、こちらも概ね同程度の値となった。このことから、ARI の解析でも臨界体系の解析と同様に、従来フィッティング法適用結果も高次モード成分のバイアスが小さく、検出器毎の α 推定結果のばらつきも小さかったため、従来フィッティング法と比較した場合の DMD の利点が明確になっていない。従って、次の 5.4.5 項では、従って、次の 5.4.5 項では、検出器の位置依存性が明確に現れ、検出器毎の α 推定結果のばらつきが大きくなる体系において原子炉雑音を測定した結果を示す。

5.4.5 運転停止体系における原子炉雑音測定実験

本項では、5.4.1 項で説明した実験体系における運転停止時の原子炉雑音を測定した結果について示す。運転停止時は中心架台が引き抜かれているため、従来フィッティング法における α 推定結果の検出器位置依存性が大きくなると考えられる。また、中心架台の引き抜きにより体系の未臨界が深くなるため、高次モード成分がより励起されやすくなり、DMD や従来フィッティング法による α 推定結果において高次モード成分の影響が大きくなると予想される。本実験は、①運転停止体系において DMD により基本モード成分の α を推定可能か、②さらに深い未臨界体系で測定することで従来フィッティング法と比較した場合に DMD の利点を明確に示すことができるか確認することを目的として実施した。

本項の流れは、まず 5.4.5.1 目で運転停止状態における実験条件と、運転停止状態の原子炉雑音測定結果から Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成した結果を示す。次に 5.4.5.2 目で、原子炉雑音測定により得た $P(\tau)$ に対して DMD と従来フィッティング法を適用し、基本モード成分の α を推定した結果について示す。

5.4.5.1 実験条件・実験結果

本実験では、運転停止時の実験体系を Shutdown 体系と呼称する。Shutdown 体系の体系図を Fig. 5-22 に示し、Shutdown 体系における実験条件を Table. 5-17、Shutdown 体系で測定した原子炉雑音から Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成した結果を Fig. 5-23 に示す。Fig. 5-22 の³He 検出器位置は、Fig. 5-16 の臨界体系、Fig. 5-19 の ARI 体系と同様である。Shutdown 体系では、全ての制御棒・安全棒が全挿入されており、中心架台は炉心から引き抜かれている。また、Am-Be 中性子源も炉心から引き抜かれている。Am-Be 中性子源が引き抜かれたとしても、核燃料中に自発核分裂や (α, n) 反応などによる内部中性子源が存在するため、Shutdown 体系においても中性子計数率は測定される[11]。Shutdown 体系の原子炉雑音測定は、原子炉

の運転が停止している夕方から朝にかけて行った。測定開始時刻は2020年10月21日17時39分、測定終了時刻は2020年10月22日9時38分であり、約16時間分の原子炉雑音測定データから頻度分布 $P(\tau)$ を作成した。Fig. 5-23で示した $P(\tau)$ の区間幅 $\Delta\tau$ は0.0001sであり、中性子検出時間間隔 τ の上限 τ_{max} は0.02sとした。Shutdown体系は最も深い未臨界体系であるため、Fig. 5-23における $P(\tau)$ の指数関数的減衰は、ARIにおける $P(\tau)$ の指数関数的減衰よりも速くなっている。

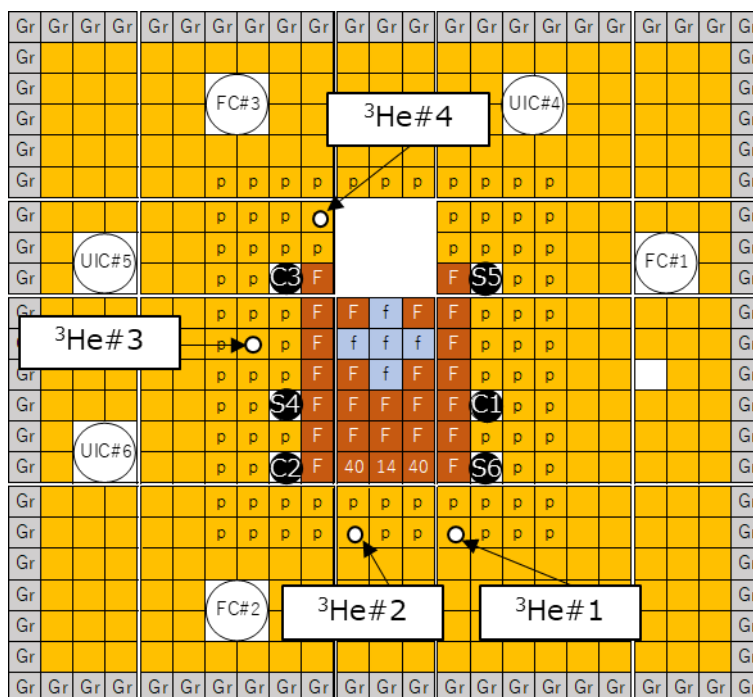


Fig. 5-22 Shutdown 体系（黒丸・白字の制御棒・安全棒は全挿入）

Table. 5-17 Shutdown 体系における実験条件

制御棒	C1	0 mm
	C2	0 mm
	C3	0 mm
安全棒	S4	0 mm
	S5	0 mm
	S6	0 mm
中心架台	引き抜き	
Am-Be 中性子源	引き抜き	

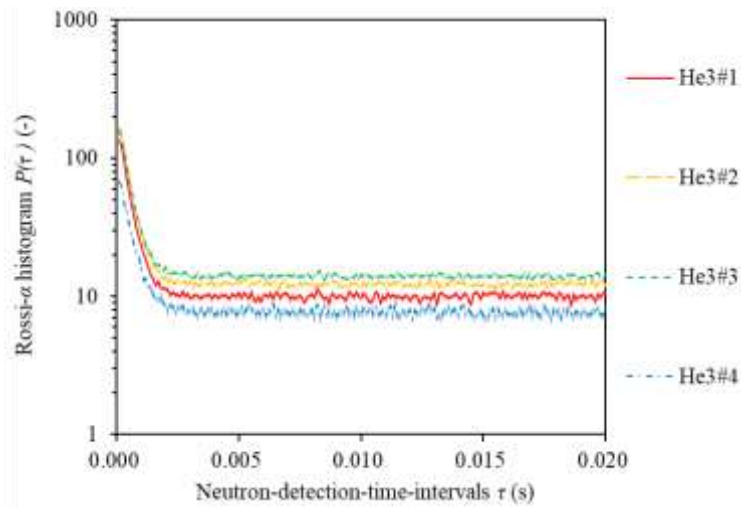


Fig. 5-23 Shutdown 体系における Rossi- α 法頻度分布

Shutdown 体系の未臨界度を求めるためには、中心架台の反応度値を求める必要がある。中心架台の反応度値を求める方法として制御棒落下法のような方法が考えられる。しかし、中心架台を炉心から完全に引き抜くまでに約 15 秒かかるため、瞬時に負の反応度を添加しなければならない制御棒落下法は、中心架台の反応度値測定には不適である。中心架台の反応度値を求めることができなければ、Shutdown 体系の未臨界度($-\rho$)を求めることができず、結果的に即発中性子減衰定数 α の参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ を得ることができない。中心架台の反応度値を算出可能な手法は限られているため[15]、今回は中心架台の反応度値から α の参考値を得ることはせずに、MCNP6.2 でパルス中性子法実験を模擬することで α の参考値を求めることとした。MCNP6.2 において Fig. 5-22 の Shutdown 体系を模擬し、Shutdown 体系の中心位置に 14 MeV の中性子を一樣に発生させ、中性子発生後の核燃料中における中性子束変化を数値計算した。MCNP6.2 によるパルス中性子法模擬実験結果を Fig. 5-24 に示す。Fig. 5-24 の模擬実験結果に対して、第 3 章 3.3.1 項で説明したパルス中性子法に対する従来フィッティング法を適用することで、 α の参考値を取得した。但し、MCNP6.2 の模擬実験では、パルス中性子の打ち込みが時刻 $t = 0$ s における 1 回だけなので、実際のパルス中性子法実験における中性子計数率の定常項は存在しない。従って、今回の従来フィッティング法におけるフィッティング式は $C(t) = C_0 \exp(-at)$ とした。Fig. 5-24 に対して、マスクング時間を変化させながらフィッティング式 $C(t) = C_0 \exp(-at)$ でフィッティングを行い、フィッティング誤差が最小となる α 推定結果を Shutdown 体系における α の参考値とした。その結果、Shutdown 体系における α の参考値は $2,631 \pm 3$ (1/s)となった。5.4.5.2 目では、この参考値を DMD と従来フィッティング法による α 推定結果との比較に用いる。

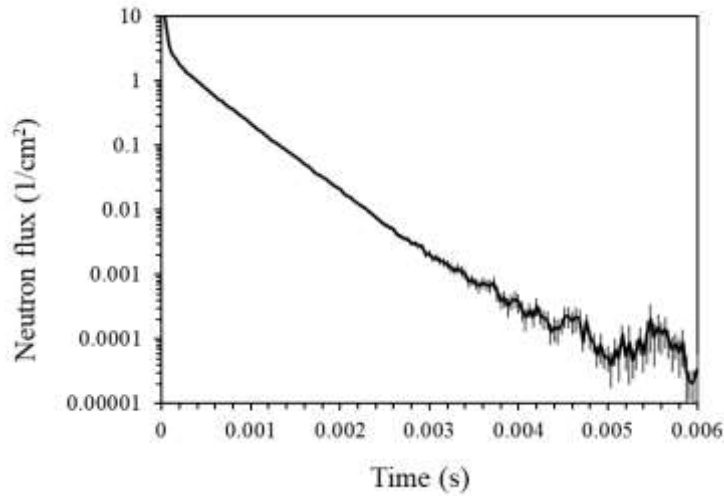


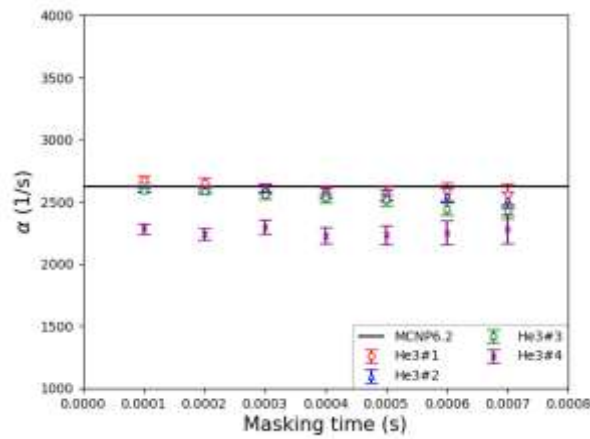
Fig. 5-24 MCNP6.2によるパルス中性子法模擬実験結果

5.4.5.2 DMDと従来フィッティング法による解析

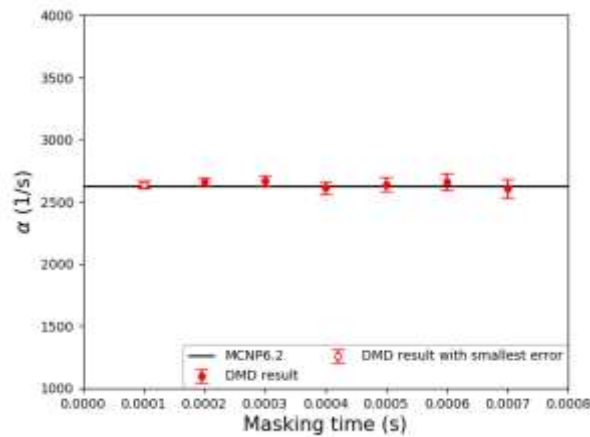
Fig. 5-23 に示した Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ に対して、従来フィッティング法と DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α を推定した結果を Fig. 5-25 に示す。

Fig. 5-25 (a) の従来フィッティング法結果を見ると、 ${}^3\text{He}\#1$ における α 推定結果では、マスク時間 0.0001 s を除けば、いずれのマスク時間においても MCNP6.2 のパルス中性子法模擬実験による参考値 2,631 (1/s) とフィッティング誤差の範囲で概ね一致している。しかし、 ${}^3\text{He}\#2$ と ${}^3\text{He}\#3$ の α 推定結果に着目すると、特に ${}^3\text{He}\#3$ において、マスク時間が増加するにつれて MCNP6.2 の参考値から外れていき、MCNP6.2 の参考値に対して過小評価となっていく傾向が見られる。 ${}^3\text{He}\#4$ に関しては、いずれのマスク時間においても参考値とフィッティング誤差の範囲で一致することはなく、他の検出器結果と比べて大幅に小さな α の値が推定されている。 ${}^3\text{He}\#4$ で他の検出器より大幅に小さな α の値が推定された理由として、 ${}^3\text{He}\#4$ が中心架台に隣接する位置に配置されていたことが挙げられる。中心架台の引き抜きにより、① ${}^3\text{He}\#4$ 周りで中性子を捕獲・吸収する物質が減少することで、即発中性子の減衰が遅くなる (α が小さくなる) 効果と、② ボイド領域が生じるために中性子が体系外に漏れやすくなることで、即発中性子の減衰が速くなる (α が大きくなる) 効果が生じる。KUCA は小型の炉心であり、元々中性子の漏れ量が大きい体系であることから、中心架台の引き抜きにより α が大きくなる効果は小さいと考えられる。そのため、中性子を捕獲・吸収する物質が減少することで α が小さくなる効果の方が相対的に大きくなり、 ${}^3\text{He}\#4$ で他の検出器よりも大幅に小さな α 推定結果が得られたと考えられる。このことより、中心架台の引き抜きが、従来フィッティング法における α 推定結果の検出器位置依存性に大きく影響を与えたことが分かる。よって、今回の従来フィッティング法結果では ${}^3\text{He}\#4$ で顕著であるように、各検出器の α 推定結果がそれぞれ異なっているため、参考値が存在しない場合にどの検出器結果を採用すべきか決定し難いという問題点が明確に現れている。

一方、Fig. 5-25 (b)の DMD による α 推定結果は、いずれのマスクング時間においても MCNP6.2 の参考値と統計誤差の範囲で一致しており、頑健に基本モード成分の α を推定することに成功している。今回の DMD 適用結果において α の統計誤差が最小となるマスクング時間は 0.0001 s であり、マスクング時間 0.0001 s における α の値は $2,640 \pm 29$ (1/s)となった。また、今回の解析で確認された DMD の利点は、従来フィッティング法と異なり複数の検出器結果から一意に α の値を得られることだけではなく、Fig. 5-25 (a)の $^3\text{He}\#4$ のように他の検出器に比べて特異な測定結果も含めて DMD を適用したとしても、基本モード成分の α を頑健に推定できることである。このことより、DMD によって推定される基本モード成分の α は、各検出器で従来フィッティング法により推定される α の平均値ではないことが分かる。以上より、Fig. 5-25 (a)の結果も踏まえると、 $^3\text{He}\#1$ のように基本モード成分を上手く測定できている検出器が一つでもあれば、DMD では頑健に基本モード成分の α を推定できると考えられる。従って、DMD による α の推定に必要な検出器数は、検出器位置を工夫して上手く基本モード成分を測定できれば、今回の実験のように 4 個程度の少ない検出器数で十分だと考えられる。今回の DMD 適用結果を纏めると、Shutdown 体系においても基本モード成分の α を推定することができ、検出器の位置依存性が大きい場合でも DMD が適用可能であることを確認したため、従来フィッティング法に対する DMD の利点が明確となった。



(a) 従来フィッティング法



(b) DMD

Fig. 5-25 Shutdown 体系における α 推定結果

5.5 本章のまとめ

本章では、主に Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の導出、従来フィッティング法と DMD による即発中性子減衰定数 α の推定方法、KUACA で実施した原子炉雑音測定実験について説明した。本章で着目した Rossi- α 法とは、原子炉雑音測定結果から中性子が検出された 2 時点の検出時間間隔 τ を計算し、検出された全ての中性子の組み合わせについて検出時間間隔 τ を求めて、 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成することで即発中性子減衰定数 α を得る実験手法である。

5.1 節では、本章の概要を説明した。

5.2 節では、Rossi- α 法における中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ の理論式を導出した。 $P(\tau)$ の理論式導出に当たって、まず 1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ と 2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ の理論式を導出した。1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ は「定常未臨界状態において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ に 1 個の中性子が検出される確率」であり、2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$

は「定常未臨界状態において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ に中性子のペアが検出される確率」である。導出された $P_1(t_1)dt_1$ と $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ を用いて、 $P(\tau)$ の理論式が $P(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\alpha_n \tau} + P_u$ というように指数関数の足し合わせと定常項で表せることを示した。以上より、 $P(\tau)$ の理論式も指数関数の足し合わせと定常項で記述できるため、Simmons-King 法と同様に DMD を適用することが可能であると考えた。

5.3 節では、従来フィッティング法による α の推定方法と、本研究で新たに適用を試みた DMD による α の推定方法について説明した。従来フィッティング法では、頻度分布 $P(\tau)$ に対してマスクング時間を設定した上で、フィッティング式 $P(\tau) = P_0 \exp(-\alpha\tau) + P_u$ で基本モード成分の α を推定した。一方、DMD では、複数の検出器で測定した $P(\tau)$ について、各検出器を行成分、各時間ステップを列成分とした行列 \mathbf{X} の形に整理する。非相関項による定常成分を差し引くため、全時間ステップに渡って 1 となる定常信号を行列 \mathbf{X} に追加した。定常信号を追加した行列 \mathbf{X} から Exact DMD により時間発展行列 \mathbf{A} を求め、 \mathbf{A} の固有値分解により各モード成分の固有値 λ_i を得る。各モード成分の固有値 λ_i について、 $\alpha_i = -\ln(\lambda_i)/\Delta\tau$ ($\Delta\tau: P(\tau)$ の区間幅)という関係式によって各モード成分の即発中性子減衰定数を得る。今回の DMD では行列 \mathbf{X} に定常成分を追加しているため、時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値 λ_{\max} は常に 1 となる。従って、最大固有値 $\lambda_{\max} = 1$ を除いて 2 番目に最大となる固有値に対応する α_i を基本モード成分の α とした。

5.4 節では、KUCA で実施した原子炉雑音測定実験とその解析結果について纏めた。今回の実験では、KUCA の A 架台にて「A1/8”p60EUEU(3)+1/8”Pb40p20EUEU 炉心」という名称の炉心を構築した。装荷した燃料集合体は、燃料として濃縮ウランを含む「1/8”p60EUEU 燃料集合体」、「1/8”p40EUEU 燃料集合体」、「1/8”p14EUEU 燃料集合体」、「1/8”Pb40p20EUEU 燃料集合体」の 4 種類を用いた。原子炉雑音の測定には、ポリエチレン減速材領域に設置した 4 個の ^3He 検出器を使用した。実験体系における制御棒価値は制御棒落下法により測定し、余剰反応度はペリオド法によって測定した。今回の原子炉雑音測定実験では、①炉心を臨界状態にした体系、②全ての制御棒・安全棒を全挿入した体系(ARI)、③運転を停止した体系(Shutdown)で測定を行った。それぞれの体系における原子炉雑音測定結果から Rossi- α 法頻度分布 $P(\tau)$ を作成し、作成した $P(\tau)$ に対して DMD と従来フィッティング法を適用した。DMD と従来フィッティング法を適用した結果、臨界体系と ARI では、DMD と従来フィッティング法の両手法ともにマスクング時間に対する基本モード成分の α 推定結果が概ね一定となり、高次モード成分による参考値との系統的差異(バイアス)がほとんど見られなかった。従来フィッティング法適用結果において、深い未臨界体系である ARI においても高次モード成分によるバイアスが見られなかったことより、今回の ^3He 検出器位置は高次モード成分の励起が小さく、高次モード成分の中性子束が検出され難い位置に配置されていたと考えられる。DMD による α の値は統計誤差が最小となる推定結果を選べば良く、臨界体系では 245 ± 1 (1/s)、ARI では $1,470 \pm 7$ (1/s)となった。一方、従来フィッティング法では検出器毎に異なる α の値が推定され、参考値が事前に与えられなければ α 推定結果を一意に決

定するのが難しいという結果となった。但し、第3章3.4.4.2目の Simmons-King 法に対する従来フィッティング法適用結果と比べると、検出器毎の α 推定結果のばらつきは大幅に低減されていた。これは、今回の原子炉雑音測定実験では検出器数が4個と少なく、いずれの検出器も減速材領域に設置されていたため、従来フィッティング法における α 推定結果の検出器位置依存性が小さくなっていたからである。そこで、検出器位置依存性が大きい体系として、原子炉の運転を停止した Shutdown 体系でも原子炉雑音測定実験を行った。運転停止時は中心架台が引き抜かれており、未臨界が深くなることで高次モード成分がより励起されやすくなるため、従来フィッティング法における α 推定結果の検出器位置依存性が大きくなる。実際に従来フィッティング法適用すると、検出器毎の α 推定結果のばらつきは臨界体系・ARI に比べて大きくなっていた。特に中心架台に隣接する位置に配置した $^3\text{He}\#4$ では他の検出器に比べて大幅に小さな α の値が推定され、他の検出器がマスクング時間に対して α の値が概ね 2,500~2,700 (1/s)で推移しているのに対して、 $^3\text{He}\#4$ では 2,200~2,300 (1/s)で推移した。一方、DMD による α 推定結果は、いずれのマスクング時間においても MCNP6.2 による参考値と統計誤差の範囲で一致し、DMD による α の統計誤差が最小となる結果は $2,640 \pm 29$ (1/s)となった。また、Shutdown 体系の解析で確認された DMD の利点は、複数の検出器結果から一意に α の値を得られることだけでなく、 $^3\text{He}\#4$ のように他の検出器に比べて特異な測定結果も含めて DMD を適用したとしても、基本モード成分の α を頑健に推定できることである。以上の解析により、Rossi- α 法に対しても DMD が適用可能であることが確認され、検出器位置依存性が大きい場合でも、従来フィッティング法とは異なり α の値を一意に決定することが容易であることが分かった。

参考文献

- [1] J. D. Orndoff, “Prompt Neutron Periods of Metal Critical Assemblies,” *Nucl. Sci. Eng.*, **2**, 4, pp. 450-460 (1957).
- [2] B. E. Simmons and J. S. King, “A Pulsed Neutron Technique for Reactivity Determination,” *Nucl. Sci. Eng.*, **3**, 5, pp. 595-608 (1958).
- [3] P. J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.656, pp.5-28, (2010).
- [4] J. H. Tu et al., “On Dynamic Mode Decomposition: Theory and Applications,” *J. Comput. Dyn.*, **1**(2), pp. 391–421 (2014).
- [5] T. Endo, Y. Yamane, and A. Yamamoto, “Space and Energy Dependent Theoretical Formula for the Third Order Neutron Correlation Technique,” *Ann. Nucl. Energy*, **33**, pp. 521-537, (2006).
- [6] “scipy.optimize.curve_fit,” SciPy.org.,
https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html
(2021/12/21 アクセス).
- [7] N. G. Sjöstrand, “Measurements on a Subcritical Reactor Using a Pulsed Neutron Source,” *Arkiv för Fysik*, **11**, pp. 233–246 (1956).
- [8] T. Gozani, “A Modified Procedure for the Evaluation of Pulsed Source Experiments in Subcritical Reactors,” *Nukleonik*, **4**, pp. 348–349 (1962).
- [9] F. Nishioka et al., “Applicability of dynamic mode decomposition to estimate fundamental mode component of prompt neutron decay constant from experimental data,” *Nucl. Sci. Eng.*, **196**, 2, pp. 133–143 (2021).
- [10] 三澤毅, 宇根崎博信, 卞哲浩, “原子炉物理実験,” 京都大学学術出版会, 日本, ISBN978-4-87698-977-5 (2010).
- [11] 塩澤武司, “固有中性子源を用いた中性子源増倍法と Feynman- α 法による未臨界度測定に関する研究,” 修士論文, 名古屋大学, (2015).
- [12] C. H. Pyeon, “Neutronics of Lead and Bismuth,”
https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-981-16-0344-0_7.pdf
(2021/12/21 アクセス).
- [13] “中性子検出器,” 放射光科学研究施設,
http://accwww2.kek.jp/oho/OHOtxt/OHO-2016/06_Sakasai_Kaoru.pdf (2021/12/21 アクセス).
- [14] 丸山博見, 岩崎智彦, 山本章夫, 中島健, 岡島成晃, 熊谷明, “シリーズ 現代核科学の基礎 1 原子炉物理,” 社団法人原子力学会, (2008).
- [15] 野中朝日, “時間領域分割積分法によるドル単位未臨界度推定,” 修士論文, 名古屋大学, (2020).
- [16] G.R. Keepin, *Physics of Nuclear Kinetics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA (1965).

- [17] B. Foad, A. Yamamoto, and T. Endo, “Uncertainty and regression analysis of the MSLB accident in PWR based on unscented transformation and low rank approximation,” *Ann. Nucl. Energy*, **143**, 107493 (2020).
- [18] C. J. Werner, J. Armstrong, S. G. Mashnik, *et al.*, *MCNP[®] USER’S MANUAL Code Version 6.2*, LA UR 17 29981, Los Alamos National Laboratory, (2017).
- [19] Y. Nauchi, T. Kameyama, “Development of calculation technique for iterated fission probability and reactor kinetic parameters using continuous energy monte carlo method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **47**, pp. 977-990, (2010).
- [20] B. C. Kiedrowski, *et al.*, “Adjoint-weighted tallies for k-Eigenvalue calculations with continuous-energy monte carlo,” *Nucl. Sci. Eng.*, **168**, 3, pp.226-241 (2011).
- [21] M. B. Chadwick, *et al.*, “ENDF/B-VII.1 Nuclear Data for Science and Technology: Cross Sections, Covariances, Fission Product Yields and Decay Data,” *Nuclear Data Sheets*, **112**, pp. 2887-2996, (2011).
- [22] 坪田忍, “Rossi- α 法による未臨界度モニター装置の開発,” 修士論文, 名古屋大学, (2008).

第6章 結論

6.1 まとめ

本研究では、原子炉物理学分野においてこれまで利用されてきた様々な炉物理実験手法について、従来の手法が抱えている課題を解決するために Dynamic Mode Decomposition (DMD)の適用可能性について検討を実施した。各章のまとめを以下に示す。

第1章では、本研究の背景と目的について述べた。

本研究の背景として、加速器駆動システム(ADS)や、福島第一原子力発電所(1F)の燃料デブリ取り出し作業における反応度事故防止のため、未臨界監視技術の開発が求められていることを挙げた。ADS の未臨界度測定手法としてパルス中性子法が挙げられる。パルス中性子法測定結果から即発中性子減衰定数 α を推定して未臨界度に換算する方法を Simmons-King 法と呼ぶ。一方、パルス中性子法測定結果における即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d の比 A_p/A_d を計算することにより、ドル単位の未臨界度を推定する方法を面積比法と呼ぶ。また、燃料デブリの未臨界度測定手法としては Rossi- α 法が挙げられる。Rossi- α 法とは、原子炉雑音測定結果から中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ を作成することで、即発中性子減衰定数 α を得る手法である。パルス中性子法の中性子計数率の理論式と、Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ の理論式は、共に指数関数で表現される複数のモードの和で表せる。

Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法で未臨界度を推定するには、複数のモードの中で最も減衰が遅く、体系内の中性子の振る舞いを最も支配する基本モード成分の中性子計数率を抽出する必要がある。従来法では、パルス中性子法の中性子計数率や Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ に対して、指数関数による非線形最小二乗フィッティングを適用することで即発中性子減衰定数 α や面積比を推定する。しかし、フィッティングの際に測定結果の基本モード成分のみを抽出する方法が未だ十分に確立されておらず、フィッティングによる α や面積比の推定結果には高次モード成分による系統的差異が存在するという課題があった。

そこで本研究では、Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法において、基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を頑健に推定可能な手法を開発することを目的とした。本研究ではこの目的を達成するため、近年多くの分野で応用されている Dynamic Mode Decomposition (DMD)と呼ばれる解析手法に着目した。本論文の内容は、Simmons-King 法・面積比法・Rossi- α 法の実験結果に対して DMD を適用することにより、実際の実験を通じて DMD の有効性について検討した結果について説明することを述べた。

第2章では、本研究で適用を試みた DMD の理論と計算手順、DMD によって推定した即発中性子減衰定数 α や面積比の統計誤差評価手法について説明した。

DMD とは、ある動的な系で得られる多次元時系列データを、複数の指数関数モードの足し合わせに展開するデータ駆動型の手法である。DMD では、時系列データの各時間ステップデータを 1 ステップ後のデータに変換する時間発展行列 \mathbf{A} を計算し、 \mathbf{A} の固有値分解により得られる固有値・固有ベクトルから、各指数関数モードの時間変化・空間分布を推定する。DMD は様々な分野で適用されており、それぞれの分野における適用目的に応じて多くの DMD の変種が提案されてきた。第 2 章では代表的な DMD として、①通常の「Standard DMD」、② \mathbf{A} の固有値分解における計算コストを削減するため、時間発展行列 \mathbf{A} を別の行列に射影する「Projected DMD」、③Projected DMD よりも厳密に \mathbf{A} の固有ベクトルを計算するために提案された「Exact DMD」、④測定データの誤差が大きい場合でも頑健に \mathbf{A} を推定可能な DMD として提案された「Total least squares DMD」の計算手順について説明した。本研究では、多くの分野で一般的に用いられており比較的実装が容易な Exact DMD を採用した。

DMD により基本モード成分の即発中性子減衰定数 α あるいは面積比を推定した場合における、DMD 推定結果の統計誤差の評価方法についてはランダムサンプリング法を用いた。本研究のランダムサンプリング法では、測定により得た時系列データ行列に対して正規乱数による摂動を加えたデータを複数作成し、全ての摂動データに DMD を適用して α あるいは面積比のヒストグラムを作成する。作成したヒストグラムの平均値を α ・面積比の推定結果とし、ヒストグラムの不偏標準偏差を α ・面積比推定結果の統計誤差とした。

第 3 章では、即発中性子減衰定数 α を推定する手法の一つである Simmons-King 法の理論と、京都大学臨界集合体実験装置(Kyoto University Critical Assembly: KUCA)で取得したパルス中性子法実験結果に対して DMD を適用した結果について述べた。

第 3 章の始めに、パルス中性子法実験で測定される中性子計数率 $C(t)$ の理論式を導出した。理論式の導出に当たって、まずグリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を時間依存輸送方程式から導出し、導出したグリーン関数 $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t | \vec{r}_0, E_0, \vec{\Omega}_0, t_0)$ を用いてパルス中性子法における中性子計数率 $C(t)$ の理論式が $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\alpha_n t} + C_{BG}$ というように指数関数の足し合わせと定常項で表せることを示した。本研究では、パルス中性子法における中性子計数率 $C(t)$ の理論式が指数関数の足し合わせで表現されることに着目し、同様に時系列データを指数関数の足し合わせに展開する DMD が適用可能であると考えた。

Simmons-King 法において基本モード成分の α を推定する手法として、従来フィッティング法と、本研究で新たに適用を試みた DMD による α の推定方法について説明した。従来フィッティング法では、中性子計数率 $C(t)$ に対してマスキング時間を設定し、高次モード成分が残存する時間ステップを削除した上で、フィッティング式 $C(t) = C_0 \exp(-\alpha t) + C_{BG}$ で基本モード成分の α を推定した。一方、DMD では、複数の検出器で測定した $C(t)$ について、各検出器を行成分、各時間ステップを列成分とした行列 \mathbf{X} に整理した。遅発中性子による定常成分を差し引くため、全時間ステップに亘って 1 となる定常信号を行列 \mathbf{X} に追加した。定常信号を追加した行列 \mathbf{X} から Exact DMD により時間発展行列 \mathbf{A} を求めた。 \mathbf{A} を固有値分解する

ことで各モード成分の固有値 λ_i が得られ、 $\alpha_i = -\ln(\lambda_i)/\Delta t$ ($\Delta t: C(t)$ の時間ステップ幅)という関係式によって各モード成分の即発中性子減衰定数を得た。今回の DMD では行列 \mathbf{X} に定常信号を追加したので、時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値 λ_{\max} は常に 1 となる。従って、最大固有値 $\lambda_{\max} = 1$ を除いて 2 番目に最大となる固有値に対応する α_i を基本モード成分の α とした。

KUCA におけるパルス中性子法実験は、KUCA の A 架台で構築した「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」で実施した。パルス中性子法における中性子計数率の測定には、合計 10 個の検出器を使用した。実験体系における制御棒値は制御棒落下法により測定し、余剰反応度はペリオド法により測定した。制御棒値測定結果と余剰反応度測定結果から算出した未臨界度 ($-\rho$)と、MCNP6.2 により計算した実効遅発中性子割合 β_{eff} と中性子生成時間 Λ から、基本モード成分の α の参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ を計算した。今回のパルス中性子法実験では、①制御棒 C1・C2・C3 のみを全挿入した体系(C1C2C3in)と、②全ての制御棒と安全棒を全挿入した体系(ARI)で測定を行った。C1C2C3in と ARI におけるパルス中性子法測定結果に対して従来フィッティング法を適用した結果、C1C2C3in と ARI のいずれも、マスキング時間が小さくなるほど α 推定結果が参考値から外れるといった系統的な差異が見られたことから、高次モード成分によるバイアスが生じていたことが確認された。また、従来フィッティング法では、検出器毎に異なる α 推定結果が得られており、事前に α の参考値が得られていなければ、一意に α 推定結果を決定することが困難であった。一方 DMD では、定常信号を加えた上で時系列データを複数の指数関数モードに分解することで、C1C2C3in と ARI のいずれも基本モード成分の α 推定結果はマスキング時間に依らず参考値 $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ と統計誤差の範囲で一致しており、従来フィッティング法に比べて高次モード成分のバイアスを大幅に低減することができた。また、DMD では複数の検出器結果から一つの α の値を得ることができ、DMD による α の値は統計誤差が最小となる推定結果を選ぶことで一意に決定できる。以上の解析により、Simmons-King 法に対して DMD が適用可能であることを確認した。

第 4 章では、ドル単位の未臨界度を測定するための実験手法の一つである面積比法の理論と、KUCA で取得したパルス中性子法実験結果から DMD によりドル単位未臨界度を推定した結果について述べた。

第 4 章ではまず、パルス中性子法測定結果における即発中性子成分面積 A_p と遅発中性子成分面積 A_d の理論式を導出した。即発中性子成分面積 A_p の理論式は α 固有関数展開を用いて導出し、遅発中性子成分面積 A_d の理論式は k_{eff} 固有関数展開を用いて導出した。導出した A_p と A_d から面積比 A_p/A_d の理論式を示し、 A_p/A_d の理論式において A_p の基本モード成分を抽出することができれば、面積比 A_p/A_d はドル単位の未臨界度に相当することを示した。

パルス中性子法測定結果から面積比を推定する方法として、従来フィッティング法に基づく外挿面積比法と、本研究で新たに考案した DMD による面積比推定手法について説明した。外挿面積比法では、中性子計数率 $C(t)$ の測定結果においてマスキング時間を設定した上で $C(t) = C_0 \exp(-at) + C_{\text{BG}}$ でフィッティングを行い、高次モード成分が残存する領域を基

本モード成分で外挿した。フィッティング式の第 1 項 $C_0 \exp(-\alpha t)$ と第 2 項 C_{BG} をそれぞれ $0 \leq t \leq \tau$ (τ : パルス中性子打ち込み周期)で時間積分することで A_p と A_d を計算して面積比 A_p/A_d を求めた。一方 DMD による面積比推定手法は、時間発展行列 \mathbf{A} の固有値分解までは Simmons-King 法に対する DMD 適用方法と同じ計算手順である。DMD による面積比推定手法では、 \mathbf{A} の固有値分解により得られる固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ にも着目し、 \mathbf{A} の固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\phi}_i$ から時系列データを $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i \vec{\phi}_i \exp(\omega_i t)$ という式に展開した。ここで、 C_i は*i*次モード成分の展開係数、 ω_i は*i*次モード成分の時定数であり $\omega_i = \ln(\lambda_i)/\Delta t$ となる。DMD により高次モード成分を除去するため、遅発中性子による定常成分に対応する 1 番目モード $C_1 \vec{\phi}_1 \exp(\omega_1 t)$ ($\omega_1 \approx 0$)と、基本モード成分に対応する 2 番目モード $C_2 \vec{\phi}_2 \exp(\omega_2 t)$ ($\omega_2 \equiv -\alpha$)のみを抽出して、時系列データを $\vec{x}(t) = C_2 \vec{\phi}_2 \exp(-\alpha t) + C_1 \vec{\phi}_1$ と展開する。また、外挿面積比法と同様にマスキング時間 t_{mask} を設定した場合は、DMD により時系列データは $\vec{x}(t) = C_2 \vec{\phi}_2 \exp\{-\alpha(t - t_{mask})\} + C_1 \vec{\phi}_1$ という式で展開される。DMD により展開された時系列データ $\vec{x}(t)$ の第 1 項 $C_2 \vec{\phi}_2 \exp\{-\alpha(t - t_{mask})\}$ と第 2 項 $C_1 \vec{\phi}_1$ をそれぞれ $0 \leq t \leq \tau$ で時間積分することで A_p と A_d を計算して面積比 A_p/A_d を求めた。

DMD や外挿面積比法の適用に用いたパルス中性子法測定結果は、第 3 章で示した KUCA のパルス中性子法測定結果と同じである。炉心体系は第 3 章で説明した「A1/8”EUEU(3)+LEU 炉心」であり、C1C2C3in と ARI で測定を行った。面積比の参考値は、第 3 章で示した制御棒価値と余剰反応度の測定結果から算出した。外挿面積比法によって面積比を推定した結果、C1C2C3in と ARI のいずれにおいても、推定された面積比はマスキング時間によって大きく変動し、使用した検出器によっても面積比の推定結果が大きく異なった。一方 DMD では、定常モードと基本モードのみで時系列データを展開したことにより、C1C2C3in と ARI の両方で、マスキング時間に依らずに参考値と統計誤差の範囲で概ね一致し、高次モード成分によるバイアスが大幅に低減されたことが確認された。また、DMD では統計誤差が最小となる面積比推定結果を選ぶことで、複数の検出器結果から面積比の値を一意に得ることができた。以上の解析により、面積比法に対して DMD が適用可能であることを確認した。

第 5 章では、即発中性子減衰定数 α を推定する手法の一つである Rossi- α 法における頻度分布 $P(\tau)$ の理論式導出と、KUCA で取得した原子炉雑音測定実験結果に対して DMD を適用し、基本モード成分の α を推定した結果について説明した。

Rossi- α 法における中性子検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)$ の理論式導出に当たって、まず 1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ と 2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1 dt_2$ の理論式を直観法に基づき導出した。 $P_2(t_1, t_2)dt_1 dt_2$ を $P_1(t_1)dt_1$ で除することにより、中性子が 1 個検出された後に検出時間間隔 $\tau \sim \tau + d\tau$ で別の中性子が検出される条件付き確率 $P(\tau)d\tau$ を求め、 $P(\tau)$ の理論式が $P(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\alpha n \tau} + P_u$ というように指数関数の足し合わせと定常項で表せることを示した。 $P(\tau)$ の理論式も指数関数の足し合わせと定常項で記述できるため、Simmons-King 法と同様に従来フィッティング法と DMD を適用することが可能であると考えた。従って、従来フィッテ

イング法では $P(\tau)$ に対して $P(\tau) = P_0 \exp(-\alpha\tau) + P_u$ でフィッティングし、DMD では $P(\tau)$ に定常信号を加えた上で Exact DMD により基本モード成分の α を推定した。

KUCA における原子炉雑音測定実験は、KUCA の A 架台で構築した「A1/8”p60EUEU(3)+1/8”Pb40p20EUEU 炉心」で実施した。原子炉雑音の測定には、4 個の³He 検出器(³He#1, #2, #3, #4)を使用した。実験体系における制御棒価値は制御棒落下法、余剰反応度はペリオド法によって測定した。今回の原子炉雑音測定実験では、①炉心を臨界状態にした体系、②全ての制御棒・安全棒を全挿入した体系(ARI)、③運転を停止した体系(Shutdown)で測定を行った。臨界体系における α の参考値は、MCNP6.2 により計算した遅発中性子割合 β_{eff} と即発中性子寿命 l から β_{eff}/l という式で計算した。ARI における α の参考値は、制御棒価値測定結果と余剰反応度測定結果から算出した未臨界度($-\rho$)と、MCNP6.2 により計算した実効遅発中性子割合 β_{eff} と中性子生成時間 Λ から $(\beta_{\text{eff}} - \rho)/\Lambda$ という式で計算した。Shutdown における α の参考値は、MCNP6.2 によりパルス中性子法実験を模擬することによって推定した。

それぞれの体系における原子炉雑音測定結果から作成した $P(\tau)$ に対して、DMD と従来フィッティング法を適用した結果、臨界体系と ARI では、DMD と従来フィッティング法の両手法ともにマスキング時間に対する基本モード成分の α 推定結果が概ね一定となっており、高次モード成分によるバイアスがほぼ見られなかった。従来フィッティング法適用結果において、深い未臨界体系である ARI においても高次モード成分によるバイアスが見られなかったため、今回の³He 検出器は高次モード成分の励起が小さい位置に配置されていたと考えられる。また、従来フィッティング法では検出器毎に異なる α の値が推定されたものの、第3章で示した Simmons-King 法に対する従来フィッティング法適用結果と比べると、検出器毎の α 推定結果のばらつきは大幅に低減されていた。これは、今回の実験ではいずれの検出器も減速材領域に設置されていたため、 α 推定結果の検出器位置依存性が小さくなっていたからである。

そこで、検出器位置依存性が大きい体系として、より未臨界が深い Shutdown 体系でも実験を行った。運転停止時は中心架台が引き抜かれているため、従来フィッティング法における α 推定結果の検出器位置依存性が大きくなる。Shutdown 体系で得られた $P(\tau)$ に従来フィッティング法を適用した結果、検出器毎の α 推定結果のばらつきは臨界体系と ARI に比べて大きくなった。特に中心架台に隣接する位置に配置した³He#4 では他の検出器に比べて大幅に小さな α の値が推定された。一方、DMD による α 推定結果は、いずれのマスキング時間においても MCNP6.2 による参考値と統計誤差の範囲で一致しており、統計誤差が最小となる推定結果を選ぶことで基本モード成分の α を一意に得られることを確認した。また、Shutdown 体系の解析で確認された DMD の利点として、³He#4 のように他の検出器に比べて特異な測定結果も含めて DMD を適用した場合でも、基本モード成分の α を頑健に推定できることが分かった。以上の解析により、Rossi- α 法に対しても DMD が適用可能であることを確認した。

6.2 今後の課題

本節では、以下の2点を本研究の今後の課題として示す。

- (1) 統計誤差の大きい測定データに対する各種 DMD の適用可能性の比較
 - (2) 測定データ点の重みを考慮した DMD の統計誤差評価手法の開発
- それぞれの課題について順に説明する。

- (1) 統計誤差の大きい測定データに対する各種 DMD の適用可能性の比較

第2章2.4節で、「Standard DMD」、「Projected DMD」、「Exact DMD」、「Total least squares DMD」の計算手順について説明した。これらの DMD の中で、本研究では Exact DMD を採用し、パルス中性子法実験や炉雑音測定実験に Exact DMD を適用することで、基本モード成分の即発中性子減衰定数 α や面積比を推定することができた。ただし、これらの実験手法に対して Exact DMD を適用する際は、Exact DMD で α や面積比をより推定し易くするため、パルス中性子法における中性子計数率や Rossi- α 法頻度分布の統計誤差を可能な限り小さくした。そのためには、パルス中性子法の中性子計数率や Rossi- α 法頻度分布を取得するに当たって、長時間の測定を行う必要があった。しかし、例えば 1F 燃料デブリ取り出し作業において、作業時間の効率を図るためには、未臨界監視に要する測定時間を少なくする必要性が生じる。

本論文で示した実験結果に対しては Exact DMD の有効性が示されているが、測定データの統計誤差が大きくなった場合でも Exact DMD が有効かどうかについては、本論文では十分に検討できていない。従って、今後の課題として、統計誤差の大きい測定データに対する Exact DMD の適用可能性を調べる事が挙げられる。また、第2章2.2節で述べたように、統計誤差の大きい測定データに対しても頑健な推定結果が得られる見込みがある DMD として、「Total least squares DMD」、「Optimized DMD」、「Noise-corrected DMD」、「Forward-backward DMD」などが挙げられる。今後は、これらの DMD も統計誤差の大きい測定データに対して適用することで、それぞれの DMD が α や面積比の推定に有効か否か比較することも課題となる。

上述した課題に対する今後の検討方法としては、例えば、まずは本論文で示したパルス中性子法実験結果あるいは炉雑音測定実験結果について、測定結果の統計誤差を定数倍した仮想的な測定データを作成し、作成した仮想的な時系列データに対して各種 DMD を適用する、といった検討案が考えられる。

- (2) 測定データ点の重みを考慮した DMD の統計誤差評価手法の開発

第2章2.5節で、DMD による α や面積比の統計誤差評価手法について説明した。本研究ではランダムサンプリング法を活用し、測定データに正規乱数による摂動を繰り返し加えることにより、DMD による α や面積比の統計誤差を評価した。一方、従来フィッティング法

を用いた α や面積比の推定結果の誤差は、プログラミング言語 Python におけるフィッティングモジュール「`scipy.optimize.curve_fit`」のオプション「`absolute-sigma`」を「`True`」に設定することで、測定データの誤差の絶対値を用いて推定した。ここで、 i 番目の時間ステップにおける測定データを y_i 、測定データ y_i の誤差を σ_i 、フィッティングで得た i 番目の時間ステップデータを $y_{i,fit}$ とする。「`scipy.optimize.curve_fit`」を用いた場合、カイ二乗値 $\chi^2 = \sum_i ((y_i - y_{i,fit}) / \sigma_i)^2$ を最小にするように非線形最小二乗法フィッティングが行われる。 χ^2 の計算式において、誤差 σ_i が大きいデータほど χ^2 に対する寄与は小さくなり、誤差 σ_i の小さなデータほど優先的に用いて非線形最小二乗法が適用されることとなる。すなわち、従来フィッティング法では、誤差 σ_i の大小に応じて、フィッティングに用いるべき測定データ y_i の「重み」が考慮されている。

一方、DMD の場合には、ランダムサンプリング法により測定データに誤差を追加しているものの、誤差を追加された測定データ点の中で、どの測定データ点を優先的に使用すべきか考慮されていない。つまり、現状の DMD アルゴリズムでは、全ての測定データ点が等しい重みで統計誤差評価が行われている。測定データ点の重みが考慮されなければ、他の測定データ点に比べて特異的に大きな誤差を持つ外れ値が測定データに含まれている場合、DMD における統計誤差が過大評価される可能性がある。従って、今後の課題として、現状の DMD の統計誤差評価手法を改良して各測定データ点の重みづけを行い、非線形最小二乗法と等価となるような DMD の重みづけアルゴリズムを構築することが挙げられる。

APPENDIX. A JAWAS-T を利用したパルス中性子法実験

炉物理計算における実効増倍率 k_{eff} の数値計算結果の妥当性確認や、炉物理計算に用いる評価済み核データの更新には、KUCA のような炉物理実験施設における核燃料を使用した臨界実験が活用されてきた。しかし、KUCA を始めとした国立大学・国立研究所が保有する高濃縮ウラン燃料は、平成 28 年の第 4 回核セキュリティサミットにおける日米首脳合意より、2021 年度までに全て米国に変換する必要がある[1]。従って、将来的に国内で高濃縮ウラン燃料を用いた臨界実験を実施することが困難な状況が想定される。

また、2021 年 12 月に公開された国産評価済み核データライブラリ JENDL-5[2],[3]では、分子動力学計算に基づいて水分子の ^1H などの熱中性子散乱則データが更新されている。この更新データの妥当性確認を行うに当たって、臨界実験を実施して k_{eff} 実験値を取得し、中性子輸送計算コードによる k_{eff} 計算値と比較する方法がある。しかし、臨界実験では核燃料など様々な核種を含んだ複雑な体系で実験を行い、 k_{eff} 実験値を得るための実験手順も複雑であるため、 k_{eff} 実験値と k_{eff} 計算値の誤差要因を特定することが難しくなる。そこで、核燃料を使用しない非増倍体系を用いて、炉物理計算の妥当性確認や評価済み核データ更新に活用できる実験手法が模索されている。

本論文の第 3 章と第 5 章で測定対象とした即発中性子減衰定数 α は、非増倍体系においても測定可能なパラメータである。即発中性子減衰定数 α は、実効増倍率 k_{eff} と強い相関を持つため、データ同化手法により α の測定結果から k_{eff} 数値計算結果の不確かさを低減できる見込みがある[4]。そこで、本研究では、日本原子力研究開発機構(JAEA)が保有している実験装置「JAEA Active Waste Assay System-Tokai(JAWAS-T) [5]」を利用して、非増倍体系におけるパルス中性子法実験を行った。APPENDIX. A では、JAWAS-T で取得したパルス中性子法実験結果を用いて、第 3 章で説明した Simmons-King 法に対する DMD の適用方法と同様に、非増倍体系の α を推定した結果について説明する。

A.1 JAWAS-T の概要

A.1 節では、本実験で使用した実験装置「JAEA Active Waste Assay System-Tokai(JAWAS-T)」について説明する。JAWAS-T (Fig. A-1)は、核廃棄物に高速中性子を打ち込んだ後における高速中性子の減衰から、核廃棄物中の核分裂性物質の量を推定する「高速中性子問いかけ法 (FNDI 法)[6]」に使用される核物質非破壊測定装置である。本装置の内部は、D-T 中性子源を用いた 14 MeV 高速中性子発生装置、グラファイトやポリエチレン等の減速材や反射材、中性子吸収材であるカドミウムにより Fig. A-2 のように構成されている。JAWAS-T 内部の一番外側に厚さ 10 cm のボロン入りポリエチレンがあり、その内側が厚さ 10 cm のポリエチレン、その内側が厚さ 20 cm のグラファイト、その内側に厚さ 0.2 cm のカドミウム

が取り付けられている。今回の実験では、非増倍体系として水を満たした水槽を用意し、水槽に高速中性子を打ち込むパルス中性子法実験を実施する目的で JAWAS-T を使用した。



Fig. A-1 JAWAS-T の概観(2021 年 11 月 2 日撮影)

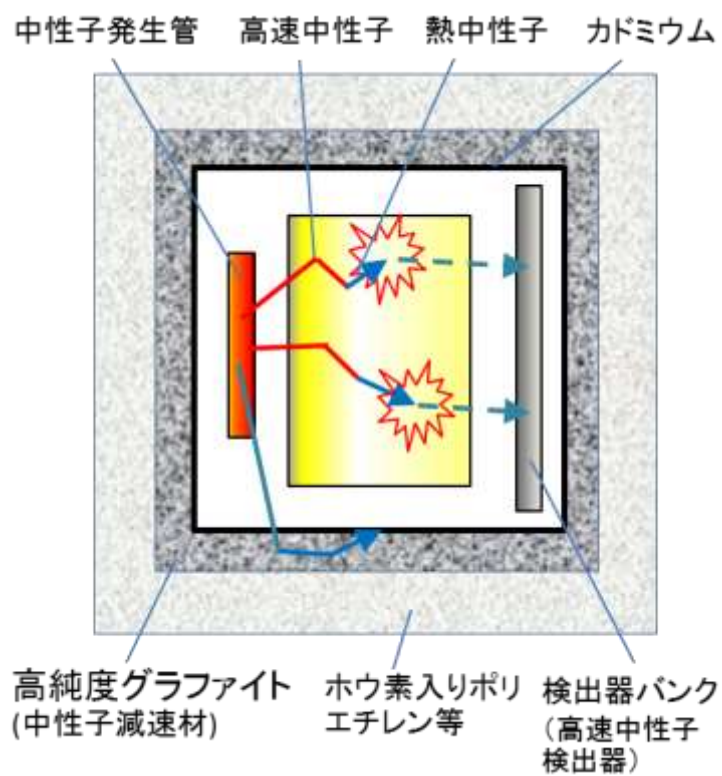


Fig. A-2 JAWAS-T 内部の概念図[5]

A.2 実験器具

A.2 節では、2021 年 11 月 2 日(火)に行った、JAWAS-T におけるパルス中性子法実験で使用した実験器具について述べる。本実験は水で満たした水槽における即発中性子減衰定数 α を測定することを目的としている。本実験で使用した水槽として、Fig. A-3 に示す円柱形のアルミニウム(Al)容器を用いた。使用した Al 容器の寸法を定規とノギスで測定した結果、外径は 20.75 cm、高さは 20.58 cm、容器厚さは 1.2 mm であった。Fig. A-4 のように Al 容器底面から 15 cm の高さに目印を記し、その目印の高さまで Al 容器に純水を注いだ。注いだ純水の温度を、接触型水温計と非接触型水温計で測定した結果を Table. A-1 に示す。

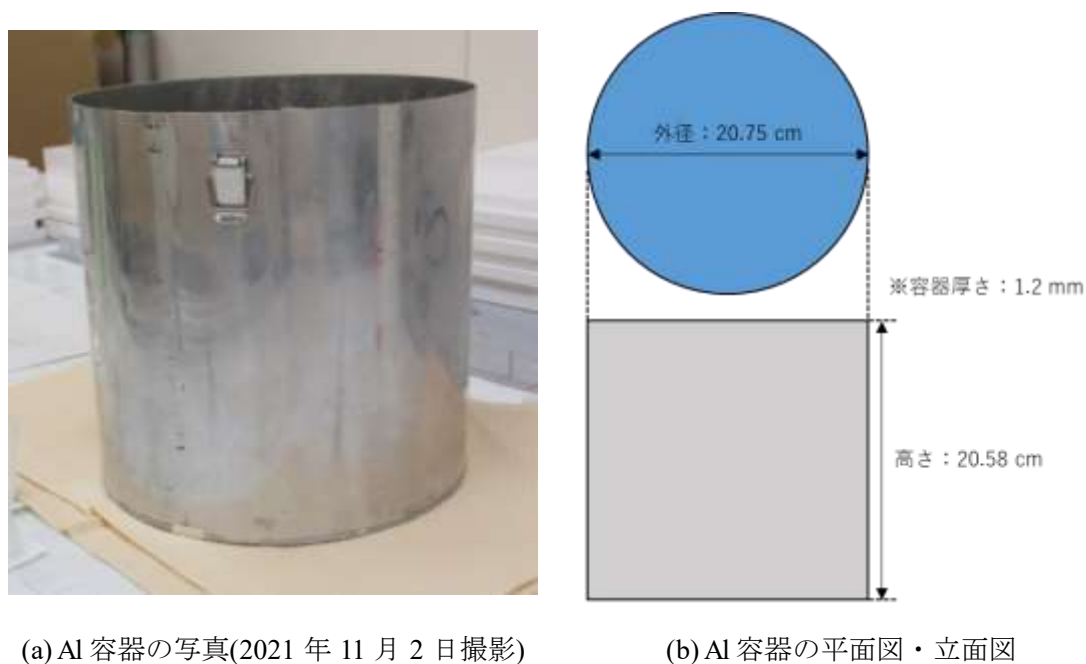


Fig. A-3 使用した Al 容器



Fig. A-4 水面高さの目印

Table. A-1 水温測定結果

接触型水温計	24.5 °C
非接触型水温計	23.1 °C

中性子の測定には ^3He 検出器を用いた。実験で使用した ^3He 検出器を Fig. A-5 に示す。今回使用した ^3He 検出器の全長は 25.3 cm であり、直径は 2.5 cm であった。有感領域の中心位置は底面から 9.1 cm の所にあり、その位置に赤色十字線の目印が付けられている。



(a) ^3He 検出器の写真 (2021 年 11 月 2 日撮影)



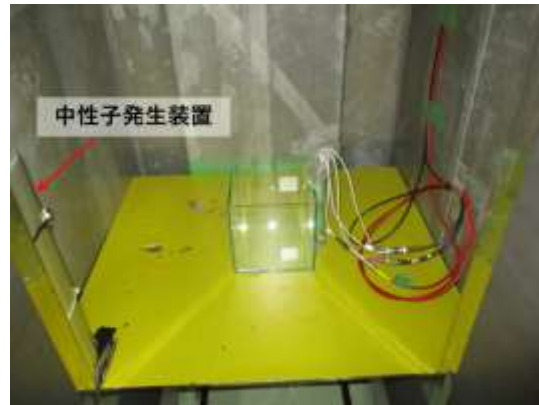
(b) ^3He 検出器の幾何形状

Fig. A-5 使用した ^3He 検出器

次に、JAWAS-T においてパルス中性子を発生させる 14 MeV 高速中性子発生装置について述べる。JAWAS-T に備え付けられている中性子発生装置を Fig. A-6 に示す。この中性子発生装置では重水素と三重水素による D-T 反応($^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + n + 17.59\text{MeV}$)を利用している。JAWAS-T の内部には対象物に中性子を照射するための空間があり、中性子発生装置は Fig. A-6 (b)のように内部空間入口部の左側の角に存在している。中性子発生装置の中心位置が、内部空間の底面(Fig. A-6 (b)における黄色の台)から 35.1 cm の高さにあったため、Fig. A-7 のジャッキを用いて中性子発生装置の中心位置と、Al 容器の中心高さ(Al 容器底面から約 10 cm)が一致するように調節した。



(a) 中性子発生装置



(b) 中性子発生装置の位置

Fig. A-6 14 MeV 中性子発生装置とその位置



Fig. A-7 Al 容器の高さ調節に用いたジャッキ

Al 容器に 14 MeV 高速中性子をパルス状に入射させてパルス中性子法実験を行う際は、Al 容器内に入射されなかった高速中性子が周りの構造物から散乱して熱中性子として Al 容器内に侵入するのを防ぐために、熱中性子を捕獲するボロンシートを Al 容器の周りに巻いて測定を行った。Al 容器の周りにボロンシートを巻いた様子を Fig. A-8 に示す。測定の際は、ボロンシートを Al 容器の側面周りに巻くだけでなく、上下からの散乱線も軽減させるために、Al 容器の上下にもボロンシートで蓋をした。なお ^3He 検出器は Fig. A-8 のように Al 容器の側面にテープで直接固定されている。



Fig. A-8 ボロンシートを巻いた Al 容器

A.3 実験体系・実験結果

今回行ったパルス中性子法実験では、検出器位置を変えて 6 回測定を行った。A.3 節ではそれぞれの測定を、測定を行った順番に Run1 から Run6 と呼称する。A.3.1 項では Run1 と Run2、A.3.2 項では Run3 と Run4、A.3.3 項では Run5 と Run6 の実験体系と実験結果を示す。

A.3.1 Run1 と Run2 の測定

始めに、Run1 と Run2 の実験体系と実験結果について記述する。Run1 と Run2 では同じ検出器位置で測定を行った。Run1 と Run2 における実験体系の写真を Fig. A-9、Run1 と Run2 における各実験器具の位置関係を Fig. A-10 に示す。JAWAS-T の内部空間底部にある黄色の台の中央部にはジャッキ四隅の設置位置を示す目印が 4 つあったので、その目印に合うようにジャッキ位置を固定し、ジャッキの上にボロンシートを巻いた Al 容器を設置した。Fig. A-10 のように上から測定空間を俯瞰したとき、ジャッキの右下の隅に当たる位置で ^3He 検出器を Al 容器に固定した。

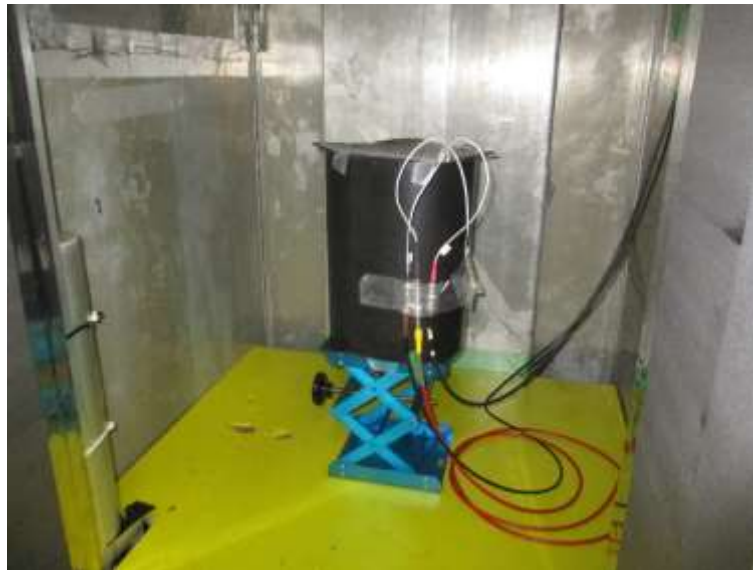


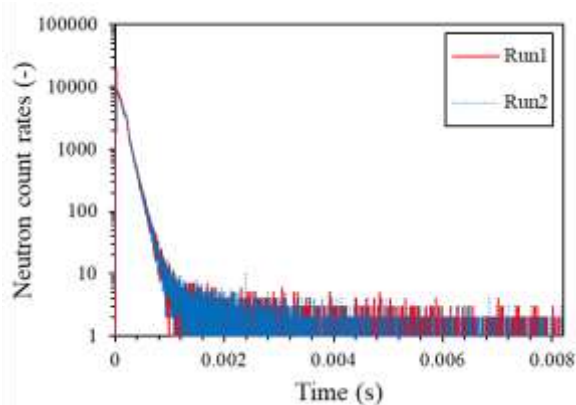
Fig. A-9 Run1 と Run2 における実験体系



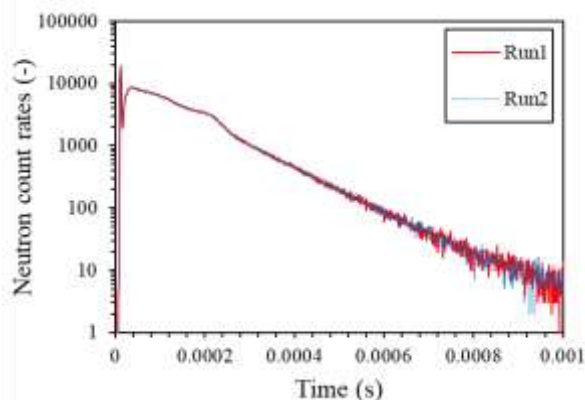
Fig. A-10 Run1 と Run2 における各実験器具の位置関係

今回のパルス中性子法実験では、最初の 14 MeV 高速中性子が打ち込まれてから 10 分間測定を行った。14 MeV 高速中性子打ち込み後の中性子計数率は、時間ステップ幅 $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$ s (1 μ s) で高速中性子打ち込み後 0.008191 s (8,191 μ s) まで測定されている。Run1 と Run2 においてパルス中性子法実験を行った結果を Fig. A-11 に示す。中性子は Fig. A-11 (b) は、Fig. A-11 (a) における横軸 0 – 0.001 s の部分のみを示した図である。Fig. A-11 (b) を見ると、パルス中性子打ち込み直後に中性子計数率が立ち上がった後、中性子計数が一旦急激に

減少した後に再度増加し、その後は中性子計数率が概ね指数関数的に減衰する結果となっている。14 MeV 高速中性子打ち込み直後に中性子計数率が一旦減少しているのは、 ^3He 検出器の不感時間により中性子の数え落としが発生したためと考えられる。また、Fig. A-11 (b) の結果より、パルス中性子打ち込み後 0.0002 s 付近で中性子計数率の小さな山が現れていることが分かる。この中性子計数率の山が発生した原因は特定できていないが、Al 容器内の水で十分減速されなかった熱外中性子の減速が高速中性子打ち込み後約 0.0002 s の時間差で発生することで、熱中性子の減衰が一時的に遅くなったものと考えられる。Fig. A-11 の結果に対して DMD を適用することを考えると、少なくとも中性子計数率の山が存在する 0.0002 s まではマスキングを行う必要がある。



(a) 横軸 : 0 – 0.008191 (s)



(b) 横軸 : 0 – 0.001 (s)

Fig. A-11 Run1 と Run2 におけるパルス中性子法測定結果

A.3.2 Run3 と Run4 の測定

次に、Run3 と Run4 の実験体系と実験結果について記述する。Run3 と Run4 の測定における検出器位置は同じである。Run3 と Run4 の実験体系を Fig. A-12、Run3 と Run4 の実験体系における各実験器具の位置関係の図を Fig. A-13 に示す。Run3・Run4 の実験体系は、Fig. A-13 のように測定空間を上から俯瞰したときに、Fig. A-10 におけるジャッキ・Al 容器・ ^3He 検出器を反時計回りに 90° 回転させた体系となっている。

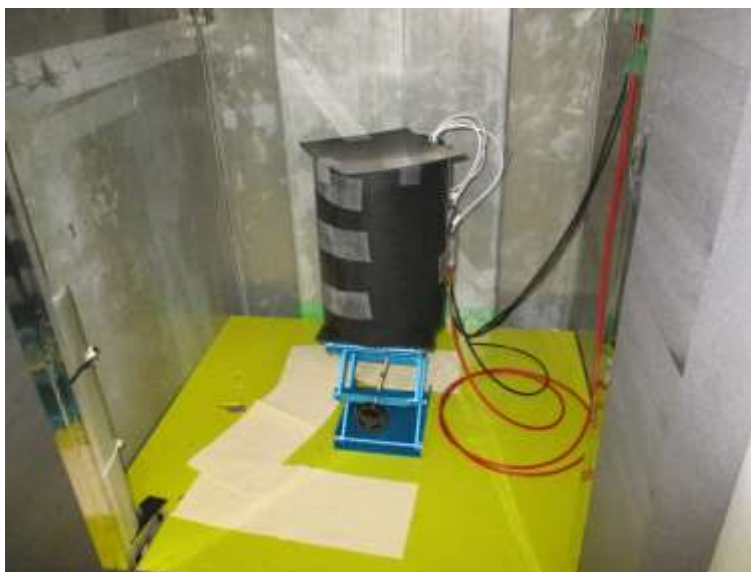
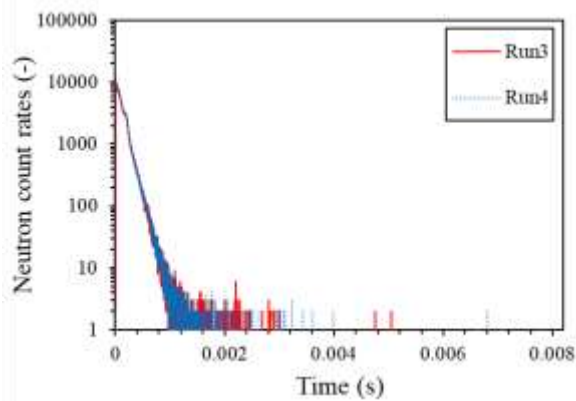


Fig. A-12 Run3 と Run4 における実験体系

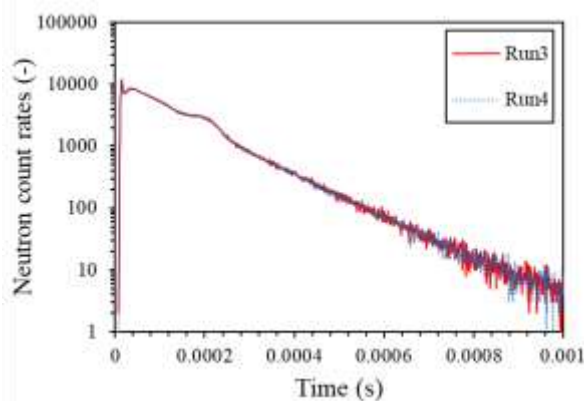


Fig. A-13 Run3 と Run4 における各実験器具の位置関係

Run3 と Run4 における測定でも、最初の 14 MeV 高速中性子が打ち込まれてから 10 分間測定を行った。Run3 と Run4 においてパルス中性子法実験を行った結果を Fig. A-14 に示す。Fig. A-14 においても、中性子は時間ステップ幅 1×10^{-6} s の間隔で測定されており、Fig. A-14 (b) は Fig. A-14 (a) における横軸 0–0.001 s の部分のみを示した図となっている。Fig. A-11 (a) と Fig. A-14 (a) を比較すると、Run1・Run2 では全時間ステップに渡って中性子が検出されているが、Run3・Run4 では高速中性子打ち込み後の約 0.003 s 以降で中性子がほとんど検出されていない。この理由は、Run3・Run4 では ^3He 検出器が Al 容器を挟んで中性子発生装置と反対側に設置されていることから、中性子発生装置に由来する周りの構造物からの散乱線が検出器に届き難かったためと考えられる。また、Fig. A-11 (b) と Fig. A-14 (b) を比較すると、Run3・Run4 の測定結果は Run1・Run2 と同様に、高速中性子打ち込み後 0.0002 s 付近で中性子計数の小さな山が生じている。



(a) 横軸 : 0 – 0.008191 (s)



(b) 横軸 : 0 – 0.001 (s)

Fig. A-14 Run3 と Run4 におけるパルス中性子法測定結果

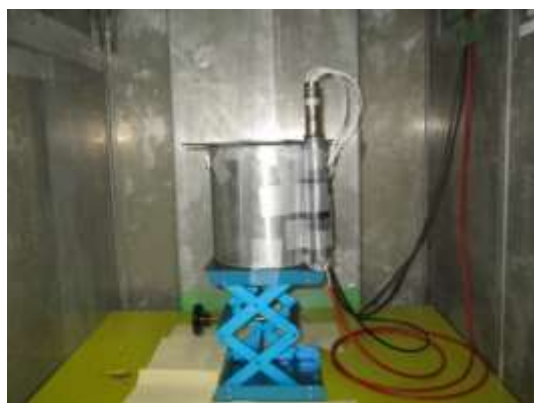
A.3.3 Run5 と Run6 の測定

最後に、Run5 と Run6 の実験体系と実験結果について記述する。複数の検出器測定結果を DMD により複数のモードに分解する場合、互いに似たような測定結果を得るだけでなく、それぞれ異なる検出器応答を示す測定結果を得ることが望ましい。そのため Run5 と Run6 では、 ^3He 検出器の周りにボロンシートを巻くことで、熱外中性子に対する検出器応答を測定することとした。ボロンシートを巻いた ^3He 検出器の図を Fig. A-15 に示す。

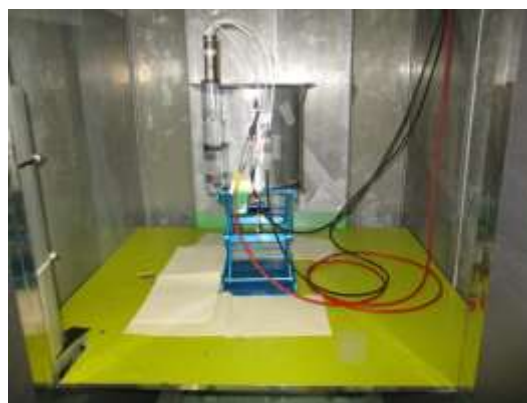


Fig. A-15 ボロンシートを巻いた ^3He 検出器

Run5 と Run6 における実験体系を Fig. A-16、Run5 における各実験器具の位置関係を Fig. A-17、Run6 における各実験器具の位置関係を Fig. A-18 に示す。Run5 と Run6 では ^3He 検出器にボロンシートを巻いたため、Al 容器の側面周りに巻いたボロンシートは取り外した。Al 容器上下のボロンシートについては Run1 から Run4 と同様に蓋として設置したままにした。Run5 における検出器位置は Run1 ・ Run2 と同じである。Run6 については、Fig. A-17 と Fig. A-18 のように JAWAS-T の測定空間を上から見たとき、Run5 におけるジャッキ ・ Al 容器 ・ ^3He 検出器を時計回りに 90° 回転させた体系となっている。



(a) Run5



(b) Run6

Fig. A-16 Run5 と Run6 における実験体系

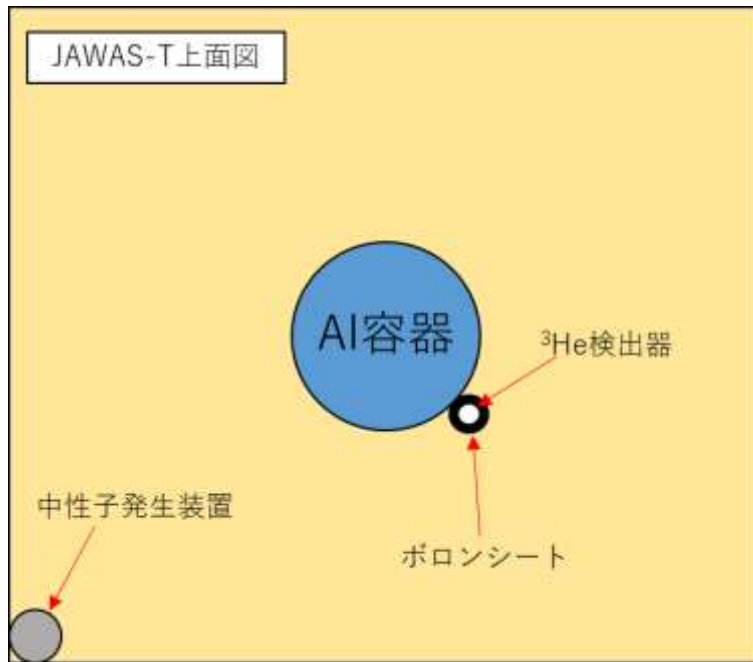


Fig. A-17 Run5 における各実験器具の位置関係

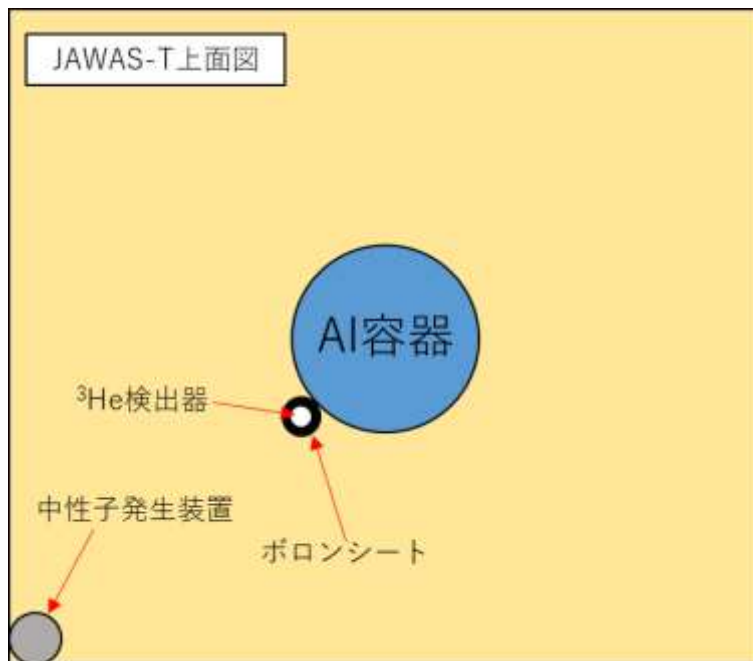
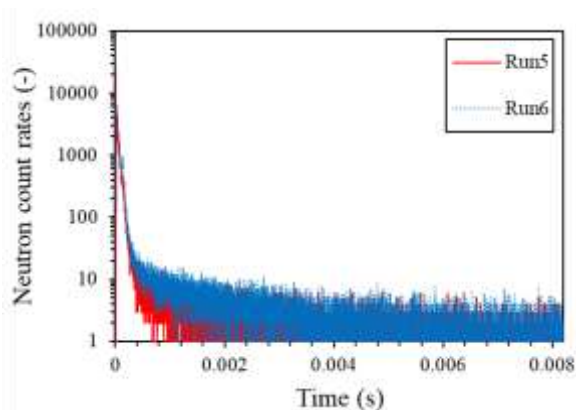


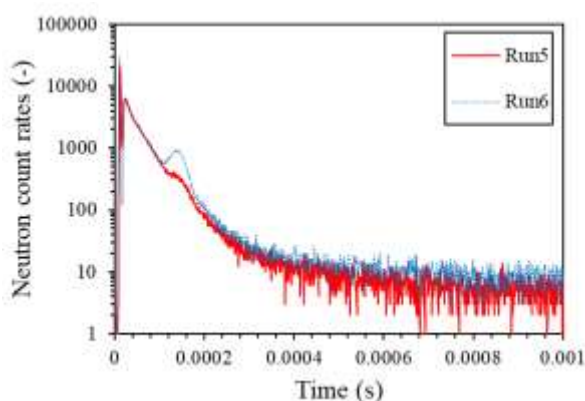
Fig. A-18 Run5 における各実験器具の位置関係

Run5 と Run6 における測定でも、最初的高速中性子が打ち込まれてから時間ステップ幅 1×10^{-6} s の間隔で 10 分間測定を行った。Run5 と Run6 においてパルス中性子法実験を行った結果を Fig. A-19 に示す。Fig. A-19 より、水槽内の熱外中性子は減速が進み熱中性子になるため、Run5 と Run6 で測定された熱外中性子の減衰は、Run1 から Run4 で測定された熱

中性子・熱外中性子の両方を含んだ中性子の減衰よりも早いことが分かる。また、Run5 と Run6 では 0.00016 s 付近で中性子計数率の山が Run1 から Run4 よりも顕著に現れており、尚且つ Run1 から Run4 よりも山が生じるタイミングが早い。このことより、Run1 から Run4 において中性子計数率の山が生じたのは、高速中性子打ち込み後約 0.00016 s で熱外中性子が増加し、増加した熱外中性子が減速する時間を経て、高速中性子打ち込み後約 0.0002 s で熱中性子計数率の山が生じたものと考えられる。



(a) 横軸 : 0 – 0.008191 (s)



(b) 横軸 : 0 – 0.001 (s)

Fig. A-19 Run5 と Run6 におけるパルス中性子法測定結果

A.4 DMD と従来フィッティング法による解析

A.4 節では、DMD と従来フィッティング法により、水を満たした AI 容器における即発中性子減衰定数 α を推定した結果を示す。JAWAS-T のパルス中性子法実験結果から α を推定する方法は、第 3 章 3.3 節で説明した Simmons-King 法に対する DMD と従来フィッティング法の適用方法と同様である。従来フィッティング法を適用する際は、Run1 から Run6 の測定結果に対して Python モジュール「`scipy.optimize.curve_fit`」を用いて $C(t) = C_0 \exp(-at) +$

C_{BG} という式でフィッティングした。DMD を適用する際は、Run1 から Run6 で得られた測定結果に加えて全時間ステップに亘って 1 となる定常信号を追加し、時間発展行列 \mathbf{A} の固有値分解において最大固有値 1 を除き 2 番目に最大となる固有値を基本モードとして抽出した。DMD とフィッティングの両手法においてマスクング時間を変化させながら α を推定し、Run1 から Run4 の測定結果において基本モード成分の減衰が明確に見られる 0.0007 s を上限としてマスクングを行った。

DMD や従来フィッティング法による α 推定結果との比較に用いる α 参考値は、第 5 章 5.4.5 項で示した KUCA の Shutdown 体系における解析と同様に、MCNP6.2 でパルス中性子法実験を模擬することで取得した。MCNP6.2 において水を満たした Fig. A-3 の Al 容器を模擬し、Al 容器の中心位置に 14 MeV の中性子を一様に発生させ、中性子発生後の Al 容器内における中性子束変化を数値計算した。MCNP6.2 によるパルス中性子法模擬実験結果を Fig. A-20 に示す。MCNP6.2 のパルス中性子法模擬実験では、 $t = 0$ sにおいてパルス中性子を 1 回しか投入していないため、実際のパルス中性子法実験のように中性子計数率の定常項は存在しない。従って、Fig. A-20 に対してマスクング時間を変化させながら $C(t) = C_0 \exp(-\alpha t)$ でフィッティングを行い、フィッティング誤差が最小となる α 推定結果を参考値とした。その結果、本実験における水を満たした Al 容器の α 参考値は $8,215 \pm 1$ (1/s)となった。

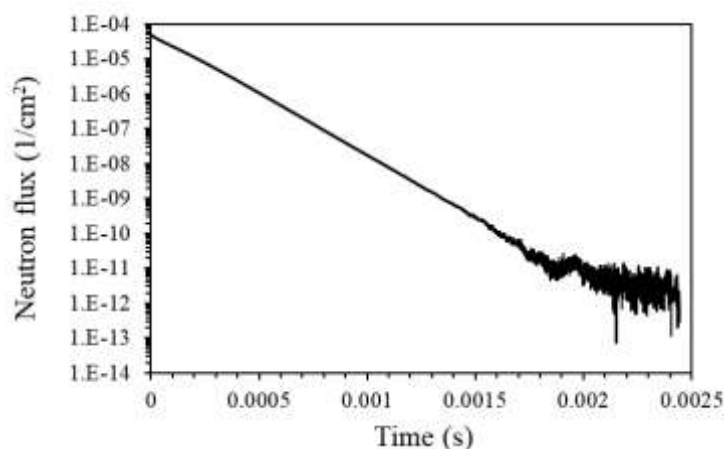


Fig. A-20 MCNP6.2 によるパルス中性子法模擬実験結果

まず、Fig. A-11 (a)、Fig. A-14 (a)、Fig. A-19 (a)に示した Run1 から Run6 の測定結果に対して従来フィッティング法を適用した結果を Fig. A-21 に示す。Fig. A-21 における Run1 から Run4 の α 推定結果を見ると、マスクング時間 0.0002 s 付近で山が生じており、これは Fig. A-11 と Fig. A-14 において中性子計数率の山が生じていたタイミングと合致する。Run1 から Run4 ではマスクング時間 0.0002 s 以降、マスクング時間の増加につれて α 推定結果は減少し、MCNP6.2 の参考値から外れていく結果となった。 ^3He 検出器の結果にボロンシートを巻いた Run5 と Run6 の α 推定結果では、Fig. A-19 で中性子計数率の山が生じた 0.00016 s 付

近において、Fig. A-21 でも α 推定結果の山が生じた。Fig. A-21 において、マスクング時間 0.0003 s 以降は、マスクング時間に対して α 推定結果は約 1,000 (1/s) で一定となった。マスクング時間 0.0003 s 以降について、Run5 と Run6 の α 推定結果は Run1 から Run4 と比べて大幅に小さな値で推移しているが、これは Run5 と Run6 において熱外中性子が十分に減衰した時間領域のみでフィッティングを行っているためである。今回の従来フィッティング法では、Run1 から Run6 の全ての測定においてマスクング時間に対して α 推定結果が変動しており、それぞれの Run 毎に異なる α の値が推定された。従って、従来フィッティング法により α 推定結果を一意に決定するためには、今回のように MCNP6.2 による数値計算などで事前に α の参考値を得なければならない。

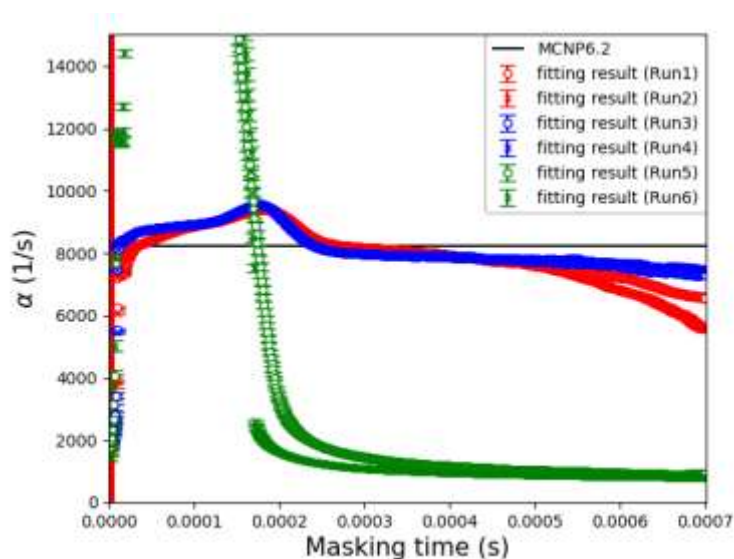
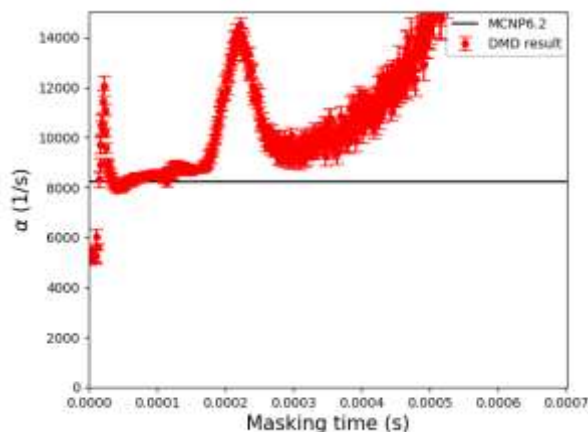


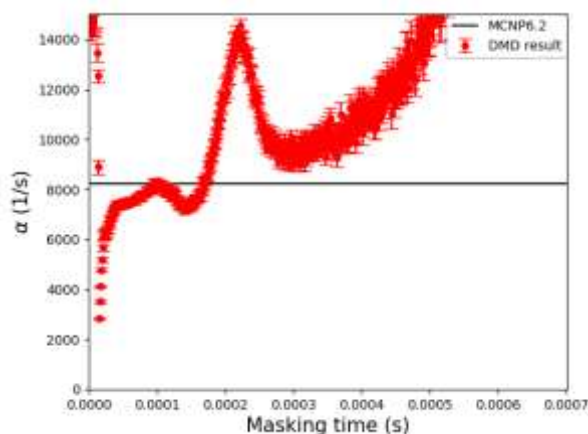
Fig. A-21 $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ における従来フィッティング法結果

次に、Fig. A-11 (a)、Fig. A-14 (a)、Fig. A-19 (a)の測定結果を用いて DMD により α を推定した結果を Fig. A-22 に示す。Run1 から Run6 の測定結果に定常信号を加えて DMD を適用した結果が Fig. A-22 (a)、Run1 から Run4 のみの測定結果に定常信号を加えて DMD を適用した結果が Fig. A-22 (b)である。Fig. A-22 (a)と Fig. A-22 (b)を見ると、Run1 から Run6 の全ての測定結果を使用した場合と、Run1 から Run4 のみの測定結果を使用した場合で α 推定結果に大きな違いはなかった。両者ともマスクング時間 0.0002 s 付近で山が生じており、マスクング時間が増加するほど α 推定結果も増加して MCNP6.2 参考値に対して過大評価となった。Fig. A-22 の DMD 適用結果もマスクング時間に対して α 推定結果が変動していることから、従来フィッティング法と同様に参考値が事前に与えられなければ、DMD で α の値を一意に決定することが難しい。また、マスクング時間が増加するにつれて、DMD を適用する Fig. A-11 (a)、Fig. A-14 (a)、Fig. A-19 (a)の測定結果において相対統計誤差が大きいデータ点しか残らなくなる。このことより、統計誤差が大きいデータに対して DMD を適用すると、時間

発展行列**A**の固有値 λ が過小評価され、 $\alpha = -\ln(\lambda)/\Delta t$ より α が過大評価となるようなバイアスが生じていると考えられる。従って、今回の測定データから DMD により非増倍体系の α を推定するためには、測定データの統計誤差を低減させる工夫が必要となる。



(a) Run1-Run6

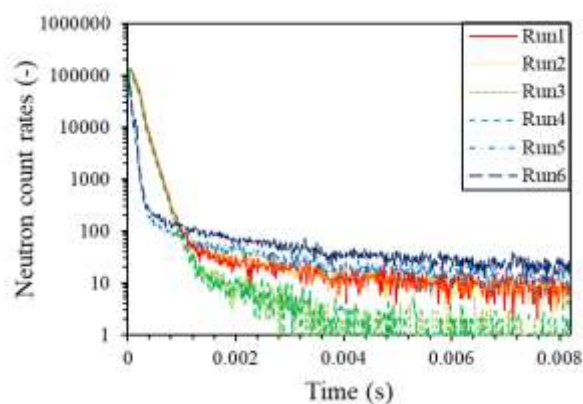


(b) Run1-Run4

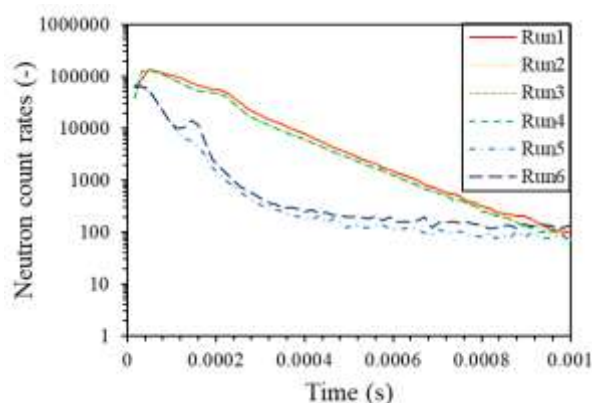
Fig. A-22 $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ における DMD 結果

JAWAS-T におけるパルス中性子法実験では、 $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ という非常に小さな時間ステップ幅で中性子計数率が測定されている。測定データの統計誤差を低減させるためには、連続する時間ステップデータを連結させて、連結させる各時間ステップにおける中性子計数率を加算することにより、中性子計数率の統計精度を確保する方法が考えられる。このとき、時間ステップ幅 Δt は連結させた時間ステップ数だけ増加する。今回の解析では、連続する時間ステップデータを 16 ステップ毎に連結させ(時間ステップ幅： $\Delta t = 16 \mu\text{s}$)、測定データの統計誤差を約 1/4 倍に低減させて従来フィッティング法と DMD を適用した。連続する時間ステップデータを 16 連結させた時の Run1 から Run6 の測定データを Fig. A-23 に示す。Fig.

A-23 (b)は Fig. A-23 (a)における横軸 0–0.001 s の部分のみを示した図となっている。



(a) 横軸 : 0 – 0.008191 (s)



(b) 横軸 : 0 – 0.001 (s)

Fig. A-23 $\Delta t = 16 \mu\text{s}$ としたパルス中性子法測定結果

Fig. A-23 (a)のデータに対して従来フィッティング法を適用した結果を Fig. A-24 に示す。Fig. A-24 におけるマスクング時間の上限は Fig. A-21 と同様に 0.0007 s とした。Fig. A-24 の α 推定結果は、Fig. A-21 の α 推定結果と同様の傾向が見られており、Run1 から Run4 ではマスクング時間 0.0002 s 付近で山が生じ、マスクング時間が増加するにつれて MCNP6.2 参考値から外れていく結果となった。Run5 と Run6 についても、マスクング時間 0.00016 s 付近で山が生じており、マスクング時間 0.0003 s 以降は α の値が約 1,000 (1/s) で一定となっている。測定データを 16 連結させても、Fig. A-21 の結果と大きく変わらなかったことより、測定データの連結が従来フィッティング法において有効ではないことが分かった。

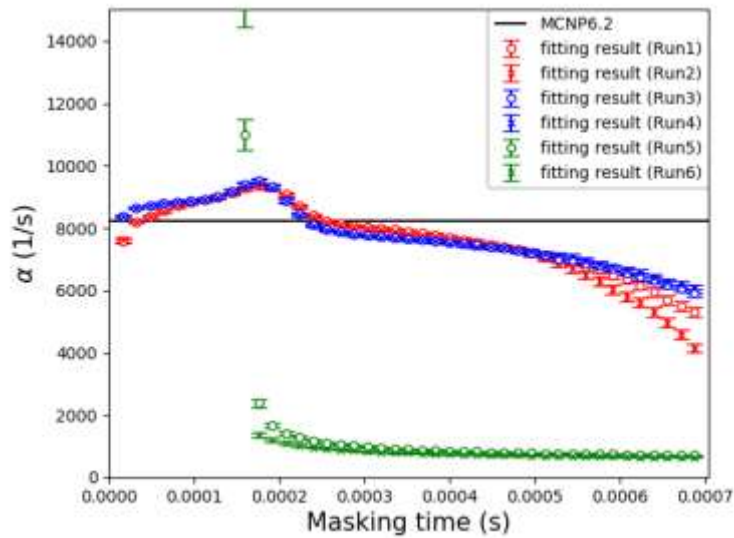
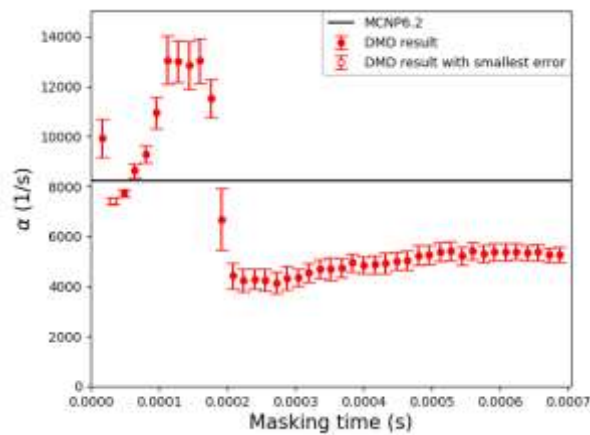


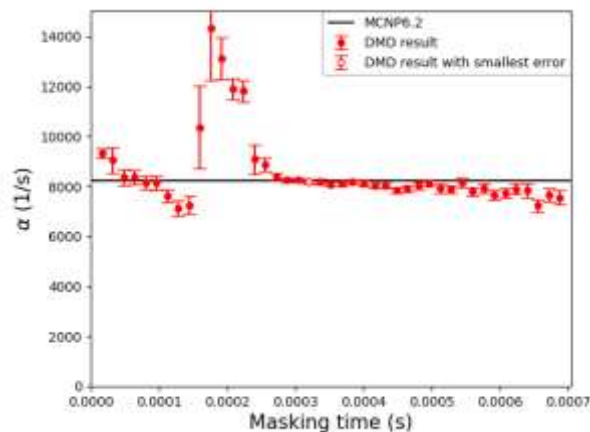
Fig. A-24 $\Delta t = 16 \mu\text{s}$ における従来フィッティング法結果

次に、測定データを16連結させてDMDを適用させた結果をFig. A-25に示す。Run1からRun6全ての測定データを使用した結果がFig. A-25 (a)、Run1からRun4のみの測定データを使用した結果がFig. A-25 (b)である。Fig. A-25 (a),(b)の結果もFig. A-22 (a),(b)の結果と同じくマスクング時間0.0002 s付近で山が生じている。但し、Fig. A-25 (b)に着目すると、マスクング時間0.0002 s以降において、DMDによる α 推定結果はMCNP6.2参考値付近を推移し、統計誤差の範囲でMCNP6.2参考値と一致した推定結果が存在している。一方、Fig. A-25 (a)では、マスクング時間0.0002 s以降 α の値が4,000~6,000 (1/s)で推移し、MCNP6.2参考値よりも大幅に過小評価されていることから、Run5とRun6の測定データはDMDの適用に有効ではないことが分かった。今回の解析では、測定データを16連結して測定データの統計誤差を約1/4倍にすることで、DMDの α 推定結果における統計誤差起因のバイアスを低減させている。この場合、Run1からRun6の各測定データにおける中性子計数率の減衰の速さが、統計誤差が大きい測定データを用いた場合よりもDMDの α 推定結果に直接的に影響を与えることになる。Run1からRun4では熱中性子と熱外中性子の計数率の減衰、Run5とRun6では熱外中性子のみの計数率の減衰を測定したため、Run1からRun4とRun5・Run6では中性子計数率の減衰の速さが極端に異なっている。従って、DMDを適用した際に同一の時間発展行列で各測定データにおける中性子計数率の時間変化を表現することが困難となる。よって、Run1からRun6全ての測定データを使用したFig. A-25 (a)ではマスクング時間0.0002 s以降、いずれのマスクング時間においてもDMDによる α 推定結果はMCNP6.2参考値と一致しなかったと考えられる。それに対して、Run1からRun4の測定データのみを用いたFig. A-25 (b)の結果では、マスクング時間0.0002 s以降において、DMDによる α 推定結果はMCNP6.2の参考値付近を推移し、Fig. A-22やFig. A-25 (a)と比較して大幅な改善が見られる。元々の測定データがパルス中性子打ち込み後0.0002 s付近で中性子計数

率の山が生じていたため、Fig. A-25 (b)の結果から α の値を一意に決定するためには、マスクング時間 0.0002 s 以降の α 推定結果から 1つだけ選ばなければならない。ここで、Fig. A-25 (b)の α 推定結果において、DMD による統計誤差が最小となるマスクング時間を確認すると、マスクング時間 0.00032 s で DMD による統計誤差が最小となっている。マスクング時間 0.00032 s における DMD の α 推定結果は $8,180 \pm 83$ (1/s)であり、MCNP6.2 参考値と統計誤差の範囲で一致している。統計誤差が最小となる DMD の α 推定結果がマスクング時間 0.0002 s 以降に存在していることから、統計誤差が最小となる α 推定結果を選択することで Fig. A-25 (b)の結果から α の値を一意に決定することが可能となる。以上の解析より、時間ステップデータを連結させて中性子計数率の統計誤差を低減させることにより、DMD で非増倍体系の α を推定できる見込みを得た。



(a) Run1–Run6



(b) Run1–Run4

Fig. A-25 $\Delta t = 16 \mu\text{s}$ における DMD 結果

参考文献

- [1] 内閣府原子力委員会 HP, “平成 30 年度版原子力白書,” <http://www.aec.go.jp/jicst/NC/about/hakusho/hakusho2019/4-2.htm>, (2022/1/8 アクセス).
- [2] O. Iwamoto, N. Iwamoto, K. Shibata, et al., “Status of JENDL,” *EPJ Web Conf.* **239**, 09002 (2020).
- [3] JAEA, “JENDL-5,” https://www.ndc.jaea.go.jp/jendl/j5/j5_J.html, (2022/1/20 アクセス).
- [4] T. Endo, A. Yamamoto, “Data assimilation using subcritical measurement of prompt neutron decay constant”, *Nucl. Sci. Eng.*, **194**, 11, pp.1089–1104 (2018).
- [5] “中性子ダイアウェイ時間差分析法,” https://nscience.jaea.go.jp/FNDI_rev0.htm, (2022/1/8 アクセス).
- [6] 大図章 他, “高速中性子直接問いかけ法による実廃棄物ドラム缶のウラン量非破壊測定システムの実用化研究,” *日本原子力学会和文論文誌*, **15**(2), pp.115–127 (2016).

APPENDIX. B ペリオド法に対する DMD の適用

本論文では、パルス中性子法や Rossi- α 法の測定結果に対して DMD を適用した結果について説明した。これらの実験手法に DMD を適用した理由は、パルス中性子法の中性子計数率 $C(t)$ や Rossi- α 法の頻度分布 $P(\tau)$ の理論式が指数関数の足し合わせで表されることから、同様に時系列データを指数関数の足し合わせに展開する手法である DMD が適用可能と考えたからである。第 3 章から第 5 章において、パルス中性子法や Rossi- α 法の測定結果に DMD を適用することにより、基本モード成分の即発中性子減衰定数 α や面積比を推定可能であることを確認した。APPENDIX. B では、DMD の更なる適用性を検討するため、原子炉の出力が e 倍または $1/e$ 倍になる時間(炉周期、ペリオド)を測定する実験手法であるペリオド法に着目した。

第 3 章 3.4.3.2 目で説明したように、体系内の中性子数 $n(t)$ と i 群遅発中性子先行核数 $C_i(t)$ の時間変化を記述する一点炉動特性方程式の一般解は、以下のように指数関数の足し合わせで記述できることが分かっている[1]。

$$n(t) = \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \quad (\text{B-1})$$

$$C_i(t) = \sum_{j=1}^7 C_{ij} \exp(\omega_j t) \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (\text{B-2})$$

(B-1)式と(B-2)式の A_j と C_{ij} は定数、時定数 ω_j は $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4 > \omega_5 > \omega_6 > \omega_7$ とする。ここで、原子炉のペリオド T は以下のように定義される。

$$T = \frac{1}{\omega_1} \quad (\text{B-3})$$

(B-1)式で表されるように、ペリオド法における中性子数の時間変化も指数関数の足し合わせで記述される。(B-1)式が指数関数の足し合わせであることに着目し、APPENDIX. B ではペリオド法測定結果に対して DMD を適用した結果について説明する。B.1 節ではまず理想的な指数関数に従うペリオド法測定結果に対して DMD を適用した結果について説明し、B.2 節では第 5 章 5.4.2.2 目にて示した KUCA におけるペリオド法測定結果に対して DMD を適用した結果を示す。

B.1 理想的なペリオド法測定結果に対する DMD の適用

B.1 節では、理想的な指数関数に従うペリオド法測定結果を作成し、理想的なペリオド法測定結果に対して検出器の不感時間や中性子計数率の統計誤差を考慮して DMD を適用した結果を示す。B.1.1 項では、理想的なペリオド法測定結果に対して不感時間や統計誤差の影響を考慮せずに DMD を適用した結果を示す。B.1.2 項では、理想的なペリオド法測定結果に対して検出器の不感時間の影響を考慮して DMD を適用した結果を示す。B.1.3 項では、理想的なペリオド法測定結果に対して中性子計数率の統計誤差を追加して DMD を適用した結果を示す。

B.1.1 理想的なペリオド法測定結果に対する DMD 適用結果

理想的な指数関数に従うペリオド法測定結果を作成するに当たって、第 5 章 5.4.2.2 目で示した、2020 年 10 月 21 日(水)に KUCA で取得したペリオド法実験結果を参考にした。第 5 章 5.4.2.2 目で説明したように、2020 年 10 月 21 日に実施したペリオド法実験では炉心の余剰反応度を測定するために、制御棒 C3 を 2 回に分けて全引き抜きした。ペリオド法実験を行った際、炉心の中に 3 個の光ファイバー検出器(Fiber#1, #2, #3)が Fig. B-1 の位置に設置されていた。Fig. B-2 に制御棒 C3 引き抜き後において、光ファイバー検出器で測定された中性子計数率の時間変化を示す。Fig. B-2 では、1 回目の制御棒 C3 引き抜きが行われた時刻を $t = 0$ s とした。なお、Fig. B-2 における時間ステップ幅 Δt は 1 s である。制御棒 C3 の引き抜きは 2 回行われたため、Fig. B-2 では中性子計数率の山が 2 回現れている。第 5 章 5.4.2.2 目より、1 回目の C3 引き抜きにおけるペリオドの実験値は 94.41 s、2 回目の C3 引き抜きにおけるペリオドの実験値は 65.14 s となった。

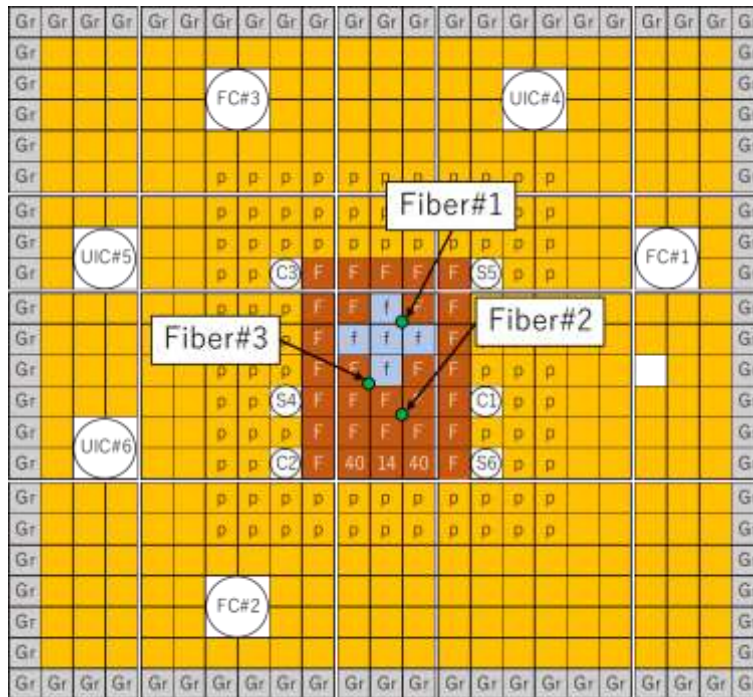


Fig. B-1 光ファイバー検出器の位置

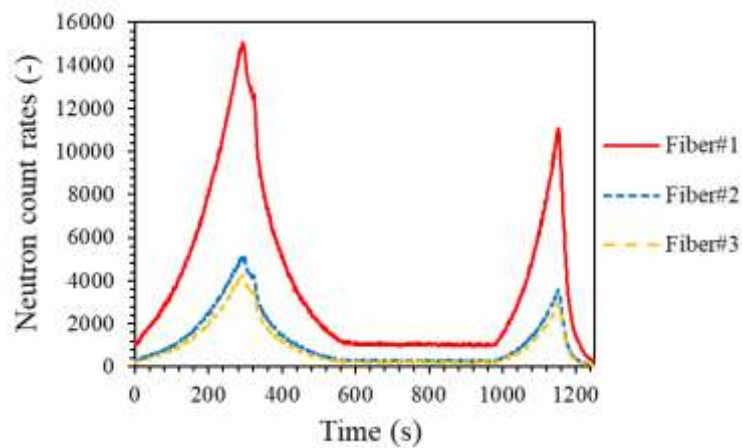


Fig. B-2 制御棒 C3 引き抜き後の中性子計数率の時間変化

理想的な指数関数に従うペリオド法測定結果の作成に当たって、Fig. B-2 において 2 回目の山が生じ始める $t = 980$ s の中性子計数率を初期値 C_0 とし、中性子計数率 $C(t)$ が理想的な指数関数 $C(t) = C_0 \exp(t/65.14)$ に従って時間変化する時系列データを作成した。理想的なペリオド法測定結果を作成する際の時間ステップ幅 Δt は 1s とした。このようにして作成した理想的なペリオド法測定結果を Fig. B-3 に示す。

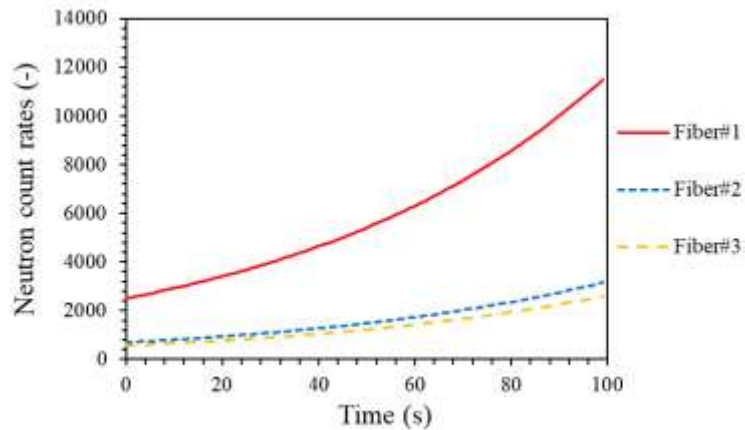


Fig. B-3 理想的なペリオド法測定結果

Fig. B-3 のデータから DMD によりペリオドを推定する方法は、第 3 章 3.3.3 項や第 5 章 5.3.2 項で説明した DMD による即発中性子減衰定数 α の推定方法と概ね同様である。但し、パルス中性子法や Rossi- α 法の測定結果とは違い、ペリオド法測定結果には定常項が存在しないため、DMD を適用する時系列データ行列 \mathbf{X} には定常信号は加えなかった。従って、時間発展行列 \mathbf{A} を固有値分解した際は、基本モード成分として最大固有値 λ_{max} を抽出し、 λ_{max} に対応する時定数 ω を $\omega = \ln(\lambda_{max})/\Delta t$ により計算した。このようにして得られた ω の逆数をとることでペリオド T を推定した。以上の DMD 適用方法に従い、Fig. B-3 においてマスクングする時間ステップ数を変化させながら、DMD によりペリオドを推定した結果を Fig. B-4 に示す。Fig. B-4 の横軸は、Fig. B-3 においてマスクングした時間ステップ数である。Fig. B-4 の結果より、マスクングする時間ステップ数に依らず DMD によるペリオド推定結果は 65.14s となり、実験値と完全に一致した。理想的なペリオド法測定結果に対しては DMD の適用によりペリオドを推定できることを確認できたが、実際の実験には検出器の不感時間や中性子計数率の統計誤差が存在する。以降の項目では、不感時間や統計誤差を Fig. B-3 に追加して DMD を適用した結果について説明する。

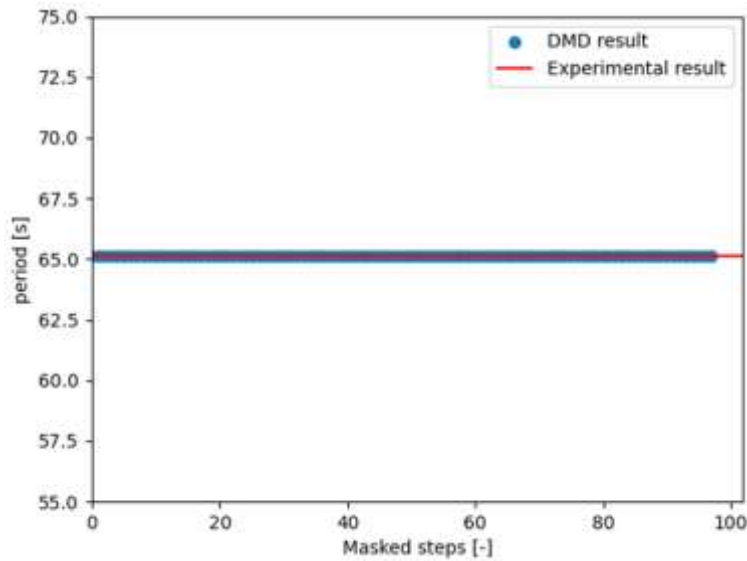


Fig. B-4 理想的なペリオド法測定結果に対する DMD 適用結果

B.1.2 不感時間の影響を考慮した解析

ペリオド法では炉心を一時的に超臨界状態にするため、中性子計数率が非常に大きくなり、検出器の不感時間による中性子の数え落としが無視できなる。この場合、検出器の不感時間を考慮し、中性子を数え落としした分を補正する必要がある。B.1.2 項では、Fig. B-3 のデータに不感時間の影響を加え、不感時間を加えたデータに対して DMD を適用することでペリオドを推定することが可能か検討する。

本研究では、不感時間内の事象は検出器の振る舞いに影響を及ぼさないとして、非麻痺型モデルを採用した。非麻痺型モデルにおける不感時間補正式は以下のように表せる。

$$n = \frac{m}{1 - m\tau} \quad (\text{B-4})$$

(B-4)式の n は真の計数率、 m は測定された計数率、 τ は検出器の不感時間である。今回は Fig. B-3 のデータを真の計数率 n として、(B-4)式を変形して以下式より不感時間の影響を加えたデータ m を仮想的に作成した。

$$m = \frac{n}{1 + n\tau} \quad (\text{B-5})$$

本項の解析では、(B-5)式における不感時間 τ の大きさを変化させながら、不感時間の影響を加えたデータに対して DMD を適用した。

不感時間の影響を加えたデータに対して DMD を適用した結果を Fig. B-5 に示す。Fig. B-5 の横軸は、(B-5)式の計算において用いた不感時間 τ の値である。不感時間を加えたデータに DMD を適用した場合にどのようなモードが抽出されるか確認するため、Fig. B-5 では時間発展行列 \mathbf{A} の最小固有値 λ_{\min} に対応するペリオドを period 1、2 番目に最小となる固有値に対応するペリオドを period 2、3 番目に最小となる固有値に対応するペリオドを period 3

としてプロットした。Fig. B-5 の結果を見ると、時間発展行列 \mathbf{A} の最小固有値に対応する period 1 が実験値 65.14 s と完全に一致した。2 番目に最小となる固有値に対応する period 2 では、不感時間の値に依らず period 1 の半分の値(約 32 s)となった。

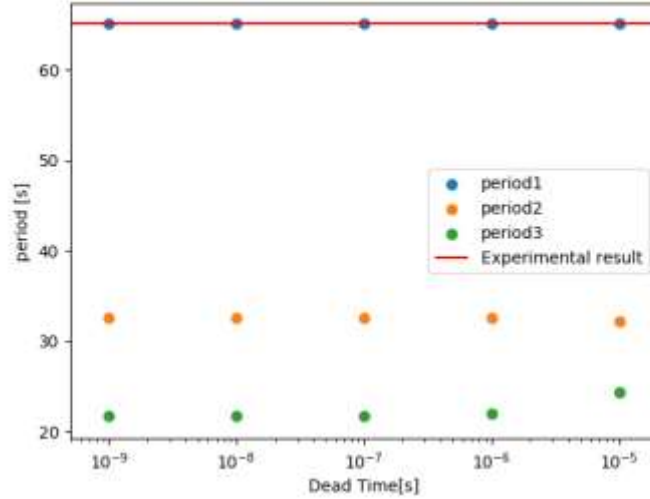


Fig. B-5 不感時間の影響を加えたデータに対する DMD 適用結果

ここからは、period 2 の値が period 1 の半分の値になる理由について説明する。(B-5)式における真の計数率 $n(t)$ が(B-1)式に従うとすると、(B-5)式は以下のように表せる。

$$m(t) = \frac{\sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t)}{1 + \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \tau} \quad (\text{B-6})$$

ここで、 $\sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \tau \ll 1$ と見なせる場合、上式はマクローリン展開より以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} m(t) &\approx \left\{ \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \right\} \times \left\{ 1 - \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \tau \right\} \\ &= \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) - \tau \left\{ \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) \right\}^2 \\ &= \sum_{j=1}^7 A_j \exp(\omega_j t) - \tau \left[\sum_{j=1}^7 A_j^2 \exp(2\omega_j t) + 2 \sum_{i=1}^7 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^7 A_i A_j \exp\{(\omega_i + \omega_j)t\} \right] \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

(B-7)式を見ると、 $m(t)$ には指数関数 $\exp(\omega_j t)$ に従って時間変化するモードだけではなく、高次モード成分として2倍の時定数を持った $\exp(2\omega_j t)$ に従うモードも存在している。今回のDMDの適用では、 $\exp(\omega_j t)$ に対応するモードが period 1 として抽出され、 $\exp(2\omega_j t)$ に対応するモードが period 2 として抽出されたため、period 2 の値が period 1 の半分の値になった

と考えられる。B.1.1 項では最大固有値に対応するモードを抽出することでペリオドを推定することができたが、不感時間の影響を加えた場合には、最大固有値に対応するモードを抽出すると $\exp(2\omega_j t)$ や $\exp[(\omega_i + \omega_j)t]$ に対応するモードが抽出されることになる。ここで、固有値 λ_i と時定数 ω_i の関係を考えて、 $\omega_i = \ln(\lambda_i)/\Delta t$ より、固有値が 1 より大きい場合に時定数は正となり、固有値が 1 より小さい場合に時定数は負となる。ペリオドは正の値であるため、不感時間の影響が加わっているデータに対して DMD によりペリオドを推定する場合は、1 より大きい固有値の中で最小となる固有値を抽出する必要がある。

B.1.3 統計誤差の影響を考慮した解析

B.1.3 項では、Fig. B-3 のデータに統計誤差を追加して DMD を適用した結果を示す。統計誤差の追加方法は、第 2 章 2.5 節で説明したランダムサンプリング法を用いた。Fig. B-3 のデータから作成した行列 \mathbf{X} の各要素 x_{ij} に対して、以下式のように正規乱数による摂動を複数回加えた。

$$x_{ij}^{(k)} = x_{ij} + c\mathcal{N}(0, \sigma_{ij}) \quad (\text{B-8})$$

(B-8) 式の σ_{ij} は x_{ij} の統計誤差である。今回は中性子計数率がポアソン分布に従うと仮定して、 x_{ij} の平方根をとった値を σ_{ij} とした。(B-8) 式の c は正規乱数 $\mathcal{N}(0, \sigma_{ij})$ の倍率であり、 c の値を変化させることにより、Fig. B-3 のデータに追加する統計誤差の大きさを変化させた。このランダムサンプリング法におけるサンプリング数 N は、ランダムサンプリング法による不確かさの相対統計誤差が 1% 以下となるように $N = 10,000$ とした。本項の解析では、 c の値を変化させながら 10,000 個のサンプルに対して DMD を適用し、時間発展行列 \mathbf{A} の最小固有値に対応するペリオド推定結果のヒストグラムを作成した。統計誤差を加えたデータに対して DMD を適用した結果を Fig. B-6 に示す。Fig. B-6 を見ると、 c の値の増加にともなって統計誤差が増加するほど、DMD によるペリオド推定結果が過大評価となっていくことが分かった。これは、Appendix. A の Fig. A-22 においてマスキング時間が増加して統計誤差が大きいデータ点のみで DMD を適用した結果と同様の傾向であり、統計誤差の影響により時間発展行列 \mathbf{A} の固有値が過小評価されたことで、Fig. B-6 において c の値が増加するほどペリオドが過大評価されたと考えられる。

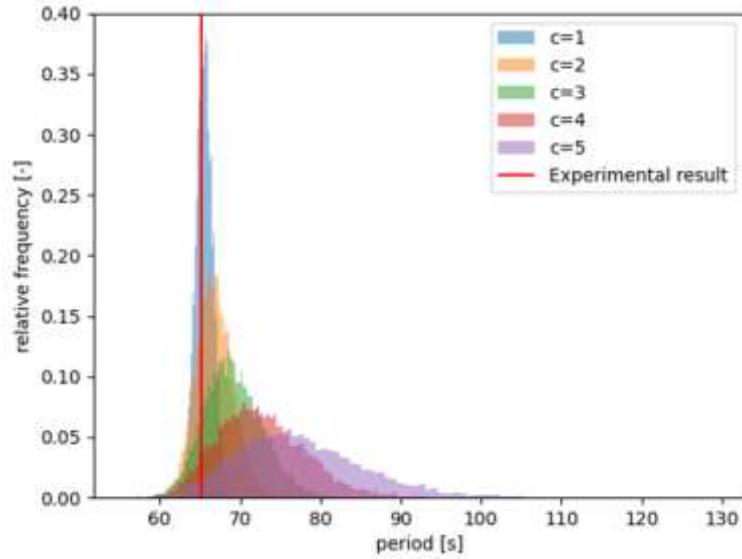


Fig. B-6 統計誤差を加えたデータに対する DMD 適用結果

ここからは、統計誤差が大きなデータに対して DMD を適用した場合に、ペリオド推定結果が過大評価となる原因について考察するため、以下に示す 1 行 3 列の簡易な時系列データ行列 \mathbf{X} を考え、行列 \mathbf{X} に DMD を適用して得られる固有値の理論式を導出する。

$$\mathbf{X} = [N_0 + \varepsilon_1 \quad N_0 e^{\omega \Delta t} + \varepsilon_2 \quad N_0 e^{2\omega \Delta t} + \varepsilon_3] \quad (\text{B-9})$$

(B-9) 式の N_0 は 1 番目の時間ステップにおける中性子計数率、 ω は時定数、 Δt は時間ステップ幅、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は各時間ステップにおける中性子計数率の統計誤差である。なお、今回の考察では、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の間の相関(共分散)は無視する。ここで、行列 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 をそれぞれ (B-10) 式と (B-11) 式のように置く。

$$\mathbf{X}_1 = [N_0 + \varepsilon_1 \quad N_0 e^{\omega \Delta t} + \varepsilon_2] \quad (\text{B-10})$$

$$\mathbf{X}_2 = [N_0 e^{\omega \Delta t} + \varepsilon_2 \quad N_0 e^{2\omega \Delta t} + \varepsilon_3] \quad (\text{B-11})$$

行列 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 の関係を、時間発展行列 \mathbf{A} を用いて以下のように記述する。

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A} \mathbf{X}_1 \quad (\text{B-12})$$

時間発展行列 \mathbf{A} を推定するために、行列 \mathbf{X}_1 の擬似逆行列 \mathbf{X}_1^\dagger を求める。擬似逆行列 \mathbf{X}_1^\dagger を求めるため、まず行列 \mathbf{X}_1 を (B-13) 式のように特異値分解する。

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad (\text{B-13})$$

(B-13) 式の添え字*は複素共役転置を表す。(B-13) 式の行列 $\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}$ はそれぞれ以下のように表せる。

$$\mathbf{U} = [1] \quad (\text{B-14})$$

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\sqrt{(N_0 e^{\omega \Delta t} + \varepsilon_2)^2 + (N_0 + \varepsilon_1)^2} \quad 0 \right] \quad (\text{B-15})$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{N_0 + \varepsilon_1}{\sqrt{(N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2)^2 + (N_0 + \varepsilon_1)^2}} & -\frac{N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2}{(N_0 + \varepsilon_1) \sqrt{\left(\frac{N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2}{N_0 + \varepsilon_1}\right)^2 + 1}} \\ \frac{N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2}{\sqrt{(N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2)^2 + (N_0 + \varepsilon_1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2}{N_0 + \varepsilon_1}\right)^2 + 1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B-16})$$

(B-13)式より、擬似逆行列 \mathbf{X}_1^+ は行列 $\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}$ を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^+ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \\ &= \frac{1}{N_0 e^{\omega\Delta t}(N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2) + N_0 e^{\omega\Delta t} \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + N_0(N_0 + 2\varepsilon_1)} \begin{bmatrix} N_0 + \varepsilon_1 \\ N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

(B-17)式で表せる擬似逆行列 \mathbf{X}_1^+ を(B-12)式の両辺に右から掛け合わせるにより、時間発展行列 \mathbf{A} を次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1^+ \\ &= \mathbf{X}_2 \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T \\ &= \frac{(N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2) \{N_0 (e^{2\omega\Delta t} + 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon_3\}}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2N_0(\varepsilon_1 + e^{\omega\Delta t} \varepsilon_2) + N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)} \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

元の時系列データ行列 \mathbf{X} が1行3列なので、(B-18)式で得られた \mathbf{A} の値がDMDで得られる固有値 λ そのものとなる。DMDで得られる固有値 λ を以下のように置く。

$$\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{(N_0 e^{\omega\Delta t} + \varepsilon_2) \{N_0 (e^{2\omega\Delta t} + 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon_3\}}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2N_0(\varepsilon_1 + e^{\omega\Delta t} \varepsilon_2) + N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)} \quad (\text{B-19})$$

(B-19)式において $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ のとき、 $\lambda(0,0,0) = e^{\omega\Delta t}$ となる。ここで、(B-19)式を2次の項までマクローリン展開する。

$$\begin{aligned} \lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &\approx \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1'} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2'} + \varepsilon_3 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_3'} \right)^k \lambda(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3') \Big|_{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3' = 0} \\ &= e^{\omega\Delta t} - \frac{e^{\omega\Delta t}}{N_0 (e^{2\omega\Delta t} + 1)} \varepsilon_1 - \frac{e^{2\omega\Delta t} - 1}{N_0 (e^{2\omega\Delta t} + 1)} \varepsilon_2 + \frac{e^{\omega\Delta t}}{N_0 (e^{2\omega\Delta t} + 1)} \varepsilon_3 \\ &\quad - \frac{e^{\omega\Delta t} (e^{2\omega\Delta t} - 1)}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} \varepsilon_1^2 - \frac{e^{\omega\Delta t} (3 - e^{2\omega\Delta t})}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} \varepsilon_2^2 \\ &\quad + \frac{5e^{2\omega\Delta t} - 1}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{e^{2\omega\Delta t} - 1}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \frac{2e^{\omega\Delta t}}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} \varepsilon_3 \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

ここで、 $\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ の期待値 $E[\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)]$ を考える。第2章2.5節で説明したDMD統計誤差評価手法に基づくと、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ はそれぞれ正規乱数 $\mathcal{N}(0, \varepsilon_1), \mathcal{N}(0, \varepsilon_2), \mathcal{N}(0, \varepsilon_3)$ に従ってランダムサンプリングされるので、 $E[\varepsilon_1] = E[\varepsilon_2] = E[\varepsilon_3] = E[\varepsilon_1 \varepsilon_2] = E[\varepsilon_2 \varepsilon_3] = E[\varepsilon_3 \varepsilon_1] = 0$ となる。よって、 $\lambda(\varepsilon)$ の期待値 $E[\lambda(\varepsilon)]$ は次のように表せる。

$$E[\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)] = e^{\omega\Delta t} - \frac{e^{\omega\Delta t} (e^{2\omega\Delta t} - 1)}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} E[\varepsilon_1^2] - \frac{e^{\omega\Delta t} (3 - e^{2\omega\Delta t})}{N_0^2 (e^{2\omega\Delta t} + 1)^2} E[\varepsilon_2^2] \quad (\text{B-21})$$

(B-21)式において、 $\omega\Delta t > 0$ とすると $e^{\omega\Delta t} > 1$ であるので、 $E[\varepsilon_1^2]$ の項は負となる。また、 $E[\varepsilon_2^2]$ の項に着目すると、現実的な値として $\Delta t = 1$ (s)、 $\omega = 0.1 \sim 0.01$ (1/s)の場合、 $e^{2\omega\Delta t} < 3$ であるので $E[\varepsilon_2^2]$ の項も負となる。従って、 ε_1 と ε_2 の絶対値が大きくなるほど、 $E[\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)]$ の値は小さくなっていく。 $E[\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)]$ の値が小さくなると、時定数 $\omega (= \ln(\lambda)/\Delta t)$ の値は過小評価となり、逆にペリオド $T (= 1/\omega)$ は過大評価となる。この効果が、Fig. B-6の結果のように、統計誤差の増大にともなってDMDによるペリオド推定結果が過大評価になる原因と考えられる。

(B-9)式の行列 \mathbf{X} に対するDMDの適用で得られる固有値と、(B-21)式によって得られる固有値が一致するか確認するための数値シミュレーションを行った。まず、(B-9)式において $N_0 = 10000$ (cps)、 $\Delta t = 1$ (s)として、 ω の値を変化させた時のシミュレーションを行った。各時間ステップにおける統計誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は、それぞれ $\varepsilon_1 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0})$ (cps)、 $\varepsilon_2 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{\omega\Delta t}})$ (cps)、 $\varepsilon_3 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{2\omega\Delta t}})$ (cps)というように正規乱数に従うものとした。ランダムサンプリング数を10,000とし、(B-9)式の時系列データにDMDを適用して得られた固有値 $\lambda \cdot$ 時定数 $\omega \cdot$ ペリオド T の期待値と、(B-21)式の解析式に基づいて得られた固有値 $\lambda \cdot$ 時定数 $\omega \cdot$ ペリオド T の期待値を比較した結果をFig. B-7に示す。Fig. B-7の結果より、DMDによる推定結果と解析式による推定結果はほぼ一致した。このシミュレーションでは N_0 の値が $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ に対して十分に大きいため、(B-21)式の $E[\varepsilon_1^2]$ と $E[\varepsilon_2^2]$ の項が無視できる。従って、DMDによる推定結果・解析式による推定結果ともに、Fig. B-7 (a)では $\lambda \approx e^{\omega\Delta t}$ が成り立っており、Fig. B-7 (b)では横軸の値と縦軸の値が一致している。なお、Fig. B-7 (c)はFig. B-7 (b)の逆数をとった結果となっている。

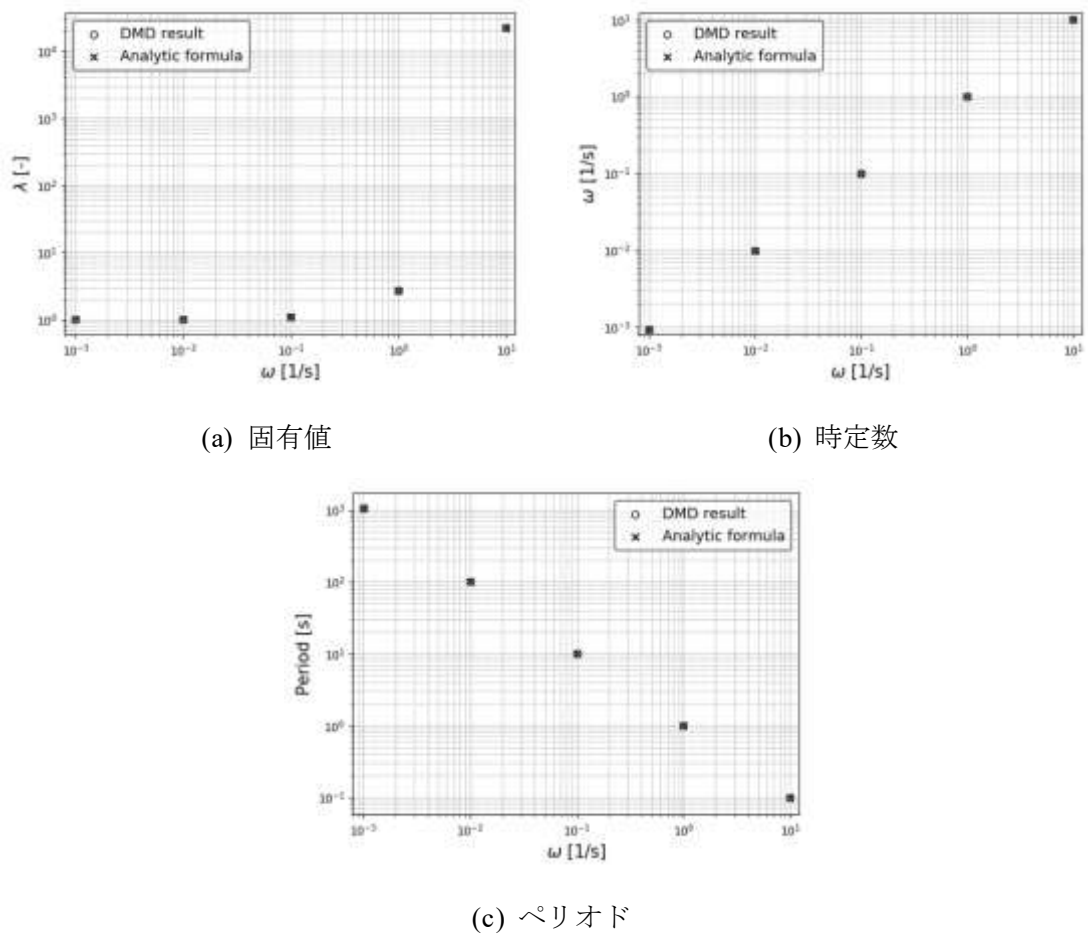
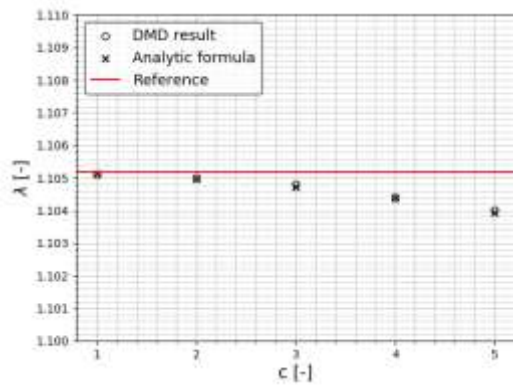
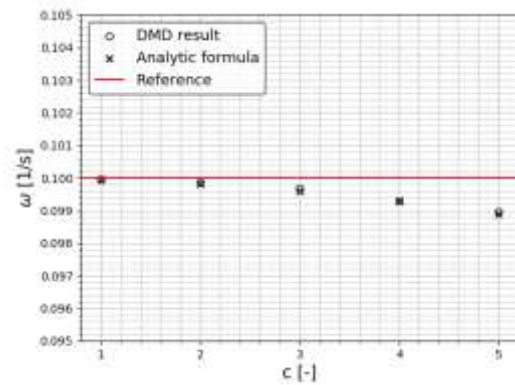


Fig. B-7 ω を変化させた時のシミュレーション結果

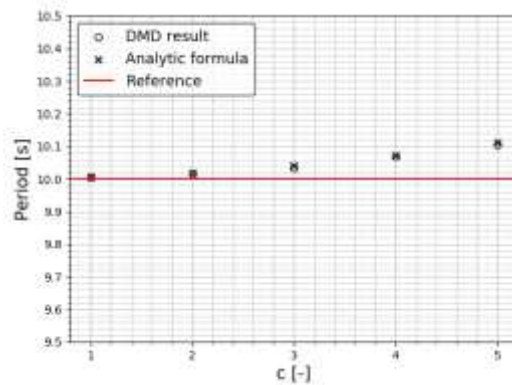
次に、(B-9)式において $N_0 = 10000$ (cps)、 $\omega = 0.1$ (1/s)、 $\Delta t = 1$ (s)、 $\varepsilon_1 = c\mathcal{N}(0, \sqrt{N_0})$ (cps)、 $\varepsilon_2 = c\mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{\omega \Delta t}})$ (cps)、 $\varepsilon_3 = c\mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{2\omega \Delta t}})$ (cps)として、 c の値を変化させた時のシミュレーションを行った。Fig. B-7と同様にランダムサンプリング数を10,000とし、(B-9)式の時系列データにDMDを適用して得られた λ, ω, T の期待値と、(B-21)式の解析式に基づいて得られた λ, ω, T の期待値を比較した結果をFig. B-8に示す。Fig. B-8の結果においても、DMDによる推定結果と解析式による推定結果はほぼ一致した。(B-21)式が示す通り、 c の値が増加して $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の絶対値が大きくなるほど、Fig. B-8(a)における λ 推定結果は理論値 $e^{\omega \Delta t} \approx 1.1052$ に対して過小評価となっている。 c の増加により λ 推定結果が過小評価となることで、 ω 推定結果も理論値0.1 (1/s)に対して過小評価となり、 ω 推定結果の逆数であるペリオド推定結果は理論値10 (s)に対して過大評価となっている。



(a) 固有値



(b) 時定数



(c) ペリオド

Fig. B-8 c を変化させた時のシミュレーション結果

最後に、(B-9)式において $\omega = 0.1$ (1/s)、 $\Delta t = 1$ (s)、 $\varepsilon_1 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0})$ (cps)、 $\varepsilon_2 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{\omega \Delta t}})$ (cps)、 $\varepsilon_3 = \mathcal{N}(0, \sqrt{N_0 e^{2\omega \Delta t}})$ (cps)として、 N_0 の値を変化させた時のシミュレーションを行った。Fig. B-7、Fig. B-8と同様に、DMDによる λ, ω, T 推定結果と解析式による λ, ω, T 推定結果をFig. B-9に示す。Fig. B-9の結果においても、DMDによる推定結果と解析式による推定結果は概ね一致した。(B-21)式が示す通り、 N_0 の値が減少して $E[\varepsilon_1^2]$ と $E[\varepsilon_2^2]$ の項が大きくなるほど、Fig. B-9(a)における λ 推定結果は理論値 $e^{\omega \Delta t} \approx 1.1052$ に対して過小評価となっている。 N_0 の減少によって λ 推定結果が過小評価されることにより、 ω 推定結果も理論値0.1 (1/s)に対して過小評価となり、ペリオド推定結果は理論値10 (s)に対して過大評価となることが確認された。以上の解析より、(B-9)式の行列 \mathbf{X} に対するDMDの適用で得られる固有値と、(B-21)式の解析式によって得られる固有値が一致することが確認され、統計誤差の増加によってDMDによるペリオド推定結果が過大評価される原因を解明することができた。

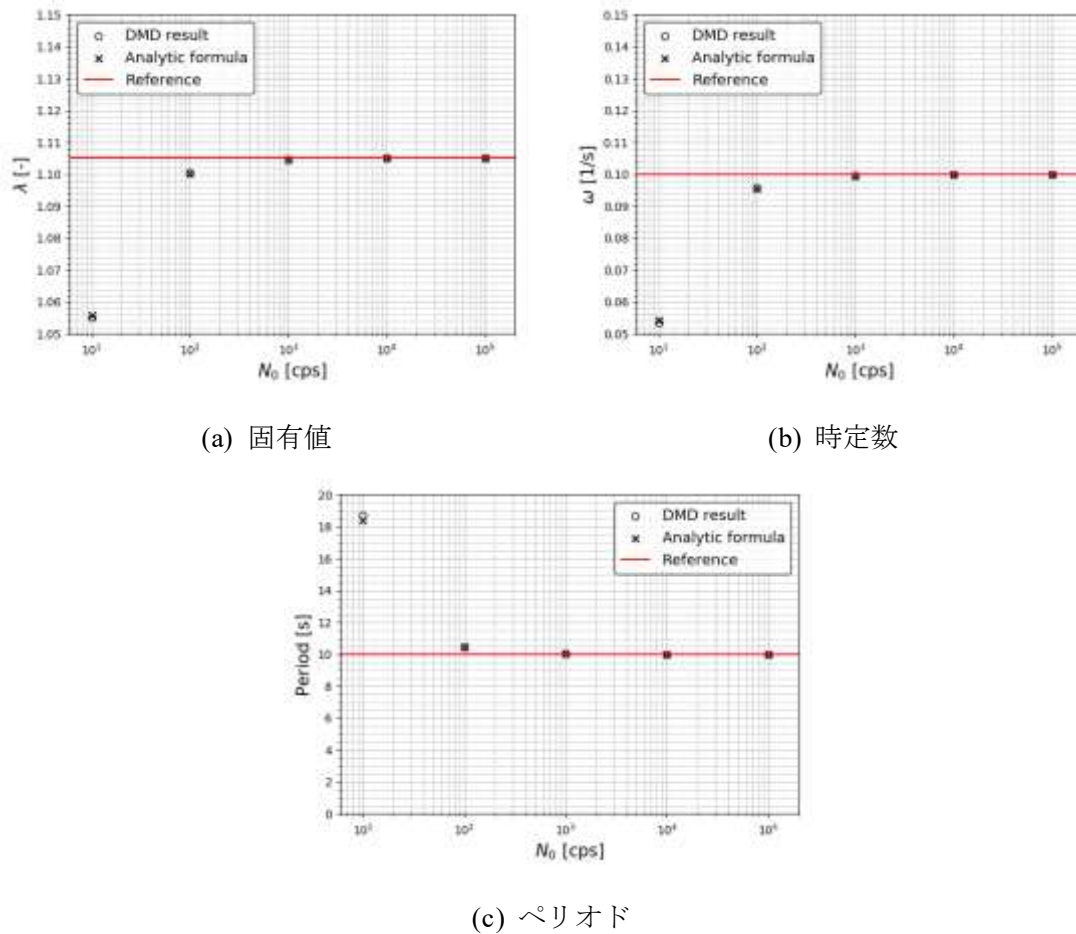


Fig. B-9 N_0 を変化させた時のシミュレーション結果

B.2 実際のペリオド法測定結果に対する DMD の適用

Fig. B-2 のペリオド法測定結果では、KUCA の運転制限(ペリオドが数 10~100 秒程度[1])を満たすため制御棒が 2 回に分けて引き抜かれたため、中性子計数率の指数関数的増加が 2 回見られている。B.2 節では、Fig. B-2 において中性子計数率が指数関数的に増加している 2 つの時間領域に対してそれぞれ DMD を適用した結果を示す。

ペリオド法で正の反応度を加えたとき、炉心の出力上昇を数十秒間に亘って測定するため、(B-2)式に従って時間変化する遅発中性子先行核から放出される遅発中性子が、測定される中性子計数率の指数関数的時間変化に影響を与える。従って、DMD により(B-1)式における $\exp(\omega_1 t)$ に対応するモードのみを抽出したい場合、パルス中性子法や Rossi- α 法の測定結果において定常成分を差し引いた時と同様に、遅発中性子先行核の時間変化に対応する成分をペリオド法測定結果から差し引く必要があると考えられる。そのためには、遅発中性子先行核の時間変化を予め計算し、DMD を適用する行列 \mathbf{X} に遅発中性子先行核成分を追加する必要がある。

遅発中性子先行核の時間変化を計算するため、本研究では Crank-Nicolson 法による一点炉動特性方程式の数値解法[2]を用いた。Crank-Nicolson 法による一点炉動特性方程式の数値解法において、遅発中性子先行核数は以下式のように計算される。

$$C_{i,n+1} = \frac{2 - \lambda_i \Delta t}{2 + \lambda_i \Delta t} C_{i,n} + \frac{\beta_i \Delta t}{\Lambda(2 + \lambda_i \Delta t)} P_n + \frac{\beta_i \Delta t}{\Lambda(2 + \lambda_i \Delta t)} P_{n+1} \quad (\text{B-22})$$

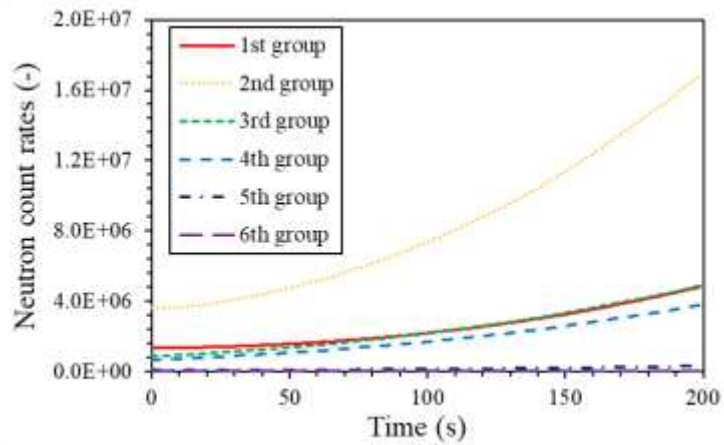
ここで、 $C_{i,n}$ は n 番目の時間ステップにおける i 群遅発中性子先行核数(-)、 P_n は n 番目の時間ステップにおける中性子数(-)、 λ_i は i 群遅発中性子の崩壊定数(-)、 β_i は i 群遅発中性子割合(-)、 Λ は中性子生成時間(s)、 Δt は時間ステップ幅(s)である。今回の解析では、Fig. B-2 において 1 回目の指数関数的増加が始まる $t = 0$ s で遅発中性子先行核数が定常状態に達していると仮定し、Fig. B-2 における 0–199 s の測定結果を 1 回目の指数関数的増加領域として、(B-22) 式における P_n の各時間ステップに与えた。1 回目の指数関数的増加領域における遅発中性子先行核数の初期値 $C_{i,0}$ は、 $t = 0$ s における中性子数 P_0 を与えた。また、Fig. B-2 において 2 回目の指数関数的増加が始まる $t = 980$ s で遅発中性子先行核数が定常状態であると仮定し、Fig. B-2 における 980–1149 s の測定結果も 2 回目の指数関数的増加領域として P_n の各時間ステップに与えた。2 回目の指数関数的増加領域における遅発中性子先行核数の初期値 $C_{i,980}$ は、 $t = 980$ s における中性子数 P_{980} を与えた。(B-22) 式の計算に用いた一点炉動特性パラメータは、第 5 章 5.4.3.1 項で示した MCNP6.2 [3] による臨界体系の実効遅発中性子割合 β_{eff} と中性子生成時間 Λ の計算結果に加え、Keepin による遅発中性子パラメータ[4]を用いた。なお、MCNP6.2 の計算に使用した評価済み核データは ENDF/VII.1 [5] である。Table B-1 に MCNP6.2 による臨界状態の β_{eff} と Λ 、Table B-2 に Keepin による遅発中性子パラメータと β_i の計算結果を示す。以上の計算条件で Crank-Nicolson 法により、Fig. B-2 の各検出器における遅発中性子先行核の時間変化を計算した結果を Fig. B-10 と Fig. B-11 に示す。Fig. B-10 は 1 回目の指数関数的増加領域の 0–199 s、Fig. B-11 は 2 回目の指数関数的増加領域の 980–1149 s における計算結果である。

Table B-1 MCNP6.2 による臨界状態の β_{eff} と Λ

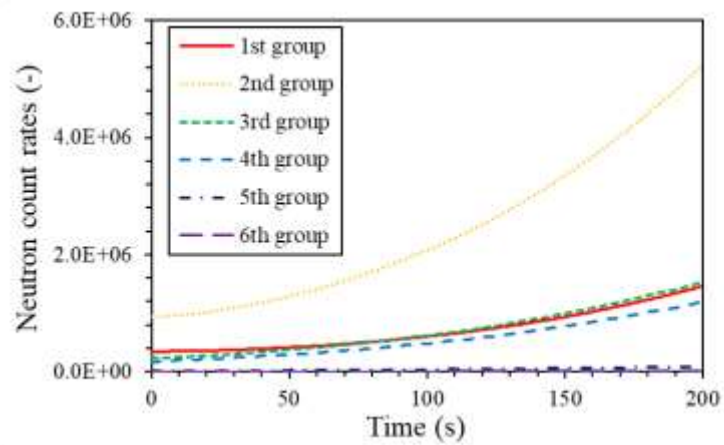
実効遅発中性子割合 β_{eff} (-)	0.00808 ± 0.00004
中性子生成時間 Λ (μs)	33.11 ± 0.03

Table B-2 Keepin による遅発中性子パラメータと β_i の計算結果

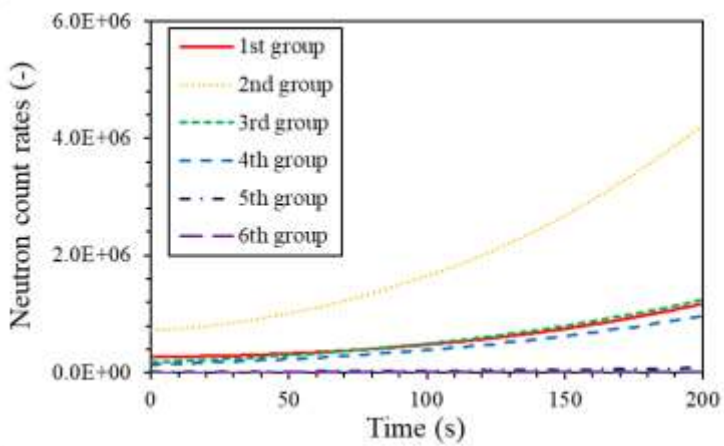
群 i	崩壊定数 λ_i (1/s)	相対収率 a_i	遅発中性子割合 $\beta_i (= a_i \times \beta_{\text{eff}})$
1	0.0124 ± 0.0003	0.033 ± 0.003	0.00027 ± 0.00002
2	0.0305 ± 0.0010	0.219 ± 0.009	0.00177 ± 0.00007
3	0.111 ± 0.004	0.196 ± 0.022	0.00158 ± 0.00018
4	0.301 ± 0.011	0.39 ± 0.011	0.00319 ± 0.00009
5	1.14 ± 0.15	0.115 ± 0.009	0.00093 ± 0.00007
6	3.01 ± 0.29	0.042 ± 0.008	0.00034 ± 0.00006



(a) Fiber#1

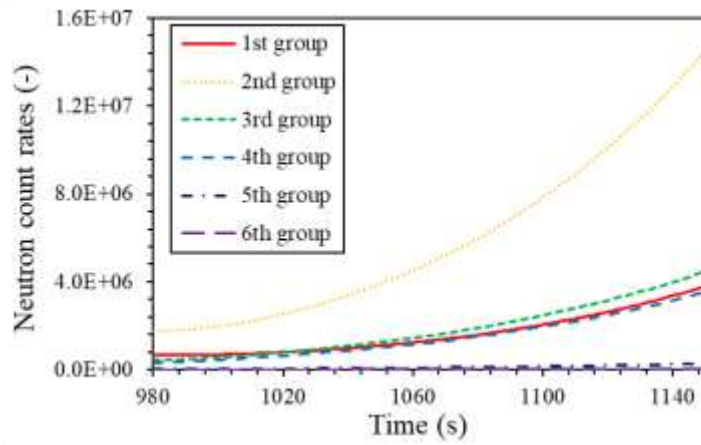


(b) Fiber#2

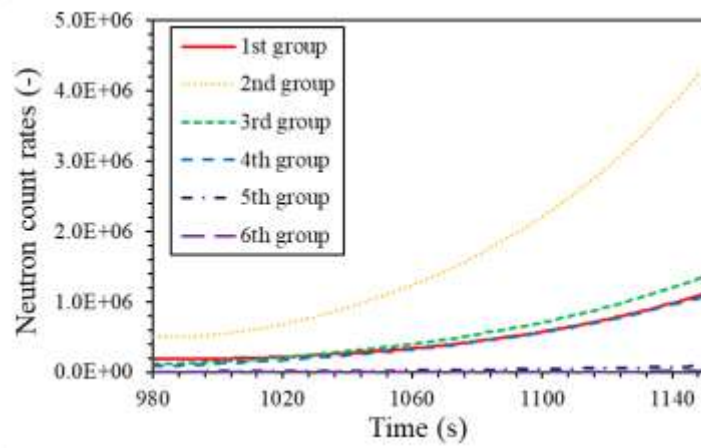


(c) Fiber#3

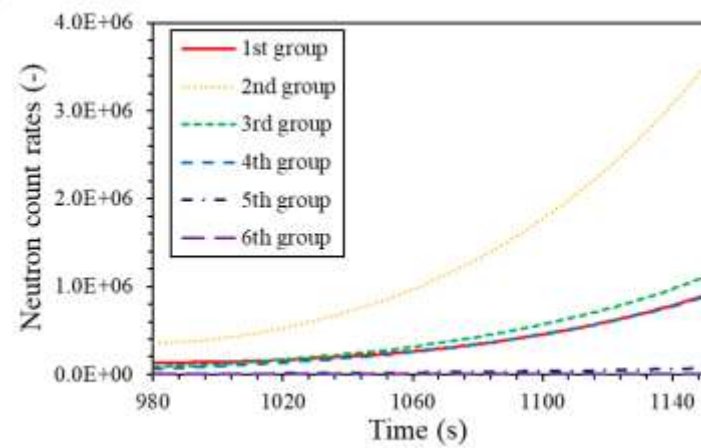
Fig. B-10 0-199 s における遅発中性子先行核数の時間変化



(a) Fiber#1



(b) Fiber#2



(c) Fiber#3

Fig. B-11 980–1149 s における遅発中性子先行核数の時間変化

DMD を適用する際は、パルス中性子法や Rossi- α 法で行列 \mathbf{X} に定常信号を追加した時と同様に、Fig. B-2 における 0–199 s または 980–1149 s の測定結果から行列 \mathbf{X} を作成し、0–199 s の測定結果から作成した行列 \mathbf{X} に対しては Fig. B-10、980–1149 s の測定結果から作成した行列 \mathbf{X} に対しては Fig. B-11 で示した遅発中性子先行核の時間変化を追加した。Fig. B-2 で中性子計数率が指数関数的に増加している領域において、検出器の不感時間によって中性子計数率の増加が停滞する現象は見られていない。従って、Fig. B-2 の測定結果は不感時間の影響を受けていないと考え、本項における DMD の適用では時間発展行列 \mathbf{A} の最大固有値に対応するペリオドを推定した。Fig. B-2 における 0–199 s の測定結果に、Fig. B-10 で示した遅発中性子先行核の時間変化を追加して DMD を適用した結果を Table B-3 に示す。同様に、Fig. B-2 における 980–1149 s の測定結果に、Fig. B-11 の計算結果を追加して DMD を適用した結果を Table B-4 に示す。Table B-3 と Table B-4 には、遅発中性子先行核の時間変化を追加した DMD 適用結果と比較するため、第 5 章 5.4.2.2 目で示したペリオドの実験値と、遅発中性子先行核の時間変化を追加しなかった場合の DMD 適用結果を示した。Table B-3 と Table B-4 を見ると、遅発中性子先行核の時間変化を加えなかった場合の DMD 適用結果は、実験値に対して過大評価となっている。一方、遅発中性子先行核の時間変化を加えた DMD 適用結果を見ると、遅発中性子先行核を加えなかった場合と比べて実験値との相対誤差が大幅に低減されており、Table B-3 では約 0.10 倍、Table B-4 では約 0.07 倍に低減されている。以上の結果より、遅発中性子先行核の時間変化を測定データに追加することで、DMD によりペリオドを推定できる見込みを得た。但し、遅発中性子先行核を追加した場合でも、Table B-3 を見ると DMD 推定結果は実験値より 3.6%過大評価されている。DMD によるペリオドが過大評価される原因として、B.1.3 項の議論より測定データの統計誤差が考えられる。従って、DMD でより正確にペリオドを推定するためには、測定データの統計誤差に依らず、頑健に時間発展行列 \mathbf{A} を推定可能なアルゴリズムを開発する必要がある。

Table B-3 0–199 s におけるペリオド推定結果

	ペリオド (s)	実験値との相対誤差 (%)
実験値	94.41	
DMD (遅発中性子先行核の追加なし)	121.13	28.30
DMD (遅発中性子先行核の追加あり)	97.08	2.82

Table B-4 980–1149 s におけるペリオド推定結果

	ペリオド(s)	実験値との相対誤差 (%)
実験値	65.14	
DMD (遅発中性子先行核の追加なし)	81.10	24.50
DMD (遅発中性子先行核の追加あり)	66.23	1.67

参考文献

- [1] 三澤毅, 宇根崎博信, 卞哲浩, “原子炉物理実験,” 京都大学学術出版会, 日本, ISBN978-4-87698-977-5 (2010).
- [2] 日本原子力学会炉物理部会, “第 46 回炉物理夏期セミナーテキスト 炉物理と原子力安全—未臨界と動特性の基礎と応用—,” pp.24–61 (2014).
- [3] C. J. Werner, J. Armstrong, S. G. Mashnik, et al., *MCNP[®] USER'S MANUAL Code Version 6.2*, LA UR 17 29981 , Los Alamos National Laboratory, (2017).
- [4] G.R. Keepin, *Physics of Nuclear Kinetics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA (1965).
- [5] M. B. Chadwick, et al., “ENDF/B-VII.1 nuclear data for science and technology: cross sections, covariances, fission product yields and decay data,” *Nuclear Data Sheets*, **112**, pp. 2887-2996, (2011).

公刊論文および口頭発表

- [1] 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫, “Dynamic Mode Decomposition を用いた即発中性子減衰定数 α 測定手法の開発,” 日本原子力学会中部支部研究発表会, 2019年12月10日–11日, 名古屋大学.
- [2] 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫, 山中正朗, 卞哲浩, “Dynamic Mode Decomposition を用いた即発中性子減衰定数 α 測定手法の開発,” 日本原子力学会 2020年春の年会, 2020年3月16日–18日, 福島大学.
- [3] 福井悠平, 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫, “Dynamic Mode Decomposition による即発中性子減衰定数の統計誤差評価手法の開発,” 日本原子力学会 2020年秋の大会, 2020年9月16日–18日, オンライン.
- [4] 西岡楓賀, 福井悠平, 遠藤知弘, 山本章夫, 山中正朗, 卞哲浩, “Dynamic Mode Decomposition を用いた即発中性子減衰定数 α 測定手法の開発,” 第8回炉物理専門研究会, 2020年12月2日, オンライン.
- [5] 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫, 渡辺賢一, 卞哲浩, “炉雑音解析手法への動的モード分解の適用: (1) Rossi- α 法に対する適用,” 日本原子力学会 2021年秋の大会, 2021年9月8日–10日, オンライン.
- [6] 遠藤知弘, 西岡楓賀, 山本章夫, 渡辺賢一, 卞哲浩, “炉雑音解析手法への動的モード分解の適用: (2) bootstrap 法を用いた統計的不確かさ評価,” 日本原子力学会 2021年秋の大会, 2021年9月8日–10日, オンライン.
- [7] 西岡楓賀, 遠藤知弘, 山本章夫, 山中正朗, 卞哲浩, “面積比法に対する動的モード分解の適用,” 日本原子力学会 2022年春の年会, 2022年3月16日–18日, オンライン.
- [8] F. Nishioka, Y. Fukui, T. Endo, A. Yamamoto, M. Yamanaka, C.H. Pyeon, "Development of estimation method for prompt neutron decay constant using dynamic mode decomposition," *Proc. M&C 2021*, pp. 1719-1728 (2021).
- [9] F. Nishioka, T. Endo, A. Yamamoto, M. Yamanaka, C.H. Pyeon, "Applicability of dynamic mode decomposition to estimate fundamental mode component of prompt neutron decay constant from experimental data," *Nucl. Sci. Eng.*, **196**, 2, pp. 133–143 (2021).
- [10] T. Endo, F. Nishioka, A. Yamamoto, K. Watanabe, C.H. Pyeon, “Application of dynamic mode decomposition to Rossi- α method in a critical state using file-by-file moving block bootstrap method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, (2022) [to be published].